Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 11/12

Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Blatt 5

Aufgabe 1. Seien $m, n \neq 0$ ganze Zahlen. Berechnen Sie

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \quad \text{und} \quad \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \quad \text{und} \quad \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

Aufgabe 2. Seien I_α und P_α eine Familie von injektiven bzw. projektiven Objekten in einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Angenommen, das Produkt und die Summe

$$\prod_\alpha I_\alpha \quad \text{und} \quad \bigoplus_\alpha P_\alpha$$

existiert in der Kategorie $\mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass diese Objekte wieder injektiv bzw. projektiv sind.

Aufgabe 3. Beweisen Sie detailliert das Schlangenlemma: Ist

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \arrow[r] & B'' & \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von abelschen Gruppen mit exakten Zeilen, so ist die Sequenz

$$\mathrm{Ker}(f') \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow \mathrm{Ker}(f'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(f') \longrightarrow \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow \mathrm{Coker}(f'')$$

exakt.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring. Angenommen, zu jeder Familie I_n von injektiven R-Moduln ist auch die Summe $\bigoplus_n I_n$ ein injektiver R-Modul. Folgern Sie daraus, dass R noethersch sein muss. Tip: Betten Sie zu einer aufsteigenden Folge von Idealen $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \ldots$ die Restklassenmodule $R/\mathfrak{a}_n$ in injektiven Module I_n ein.

Abgabe: Bis Montag, den 21.11.2011 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.