Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 11/12

Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei R ein Ring. Bestimmen Sie die Fasern $f^{-1}(x)$, $x \in \operatorname{Spec}(R)$ zum kanonischen Morphismus

$$f : \mathbb{P}^1_R \longrightarrow \operatorname{Spec}(R),$$

der durch die Inklusionen $R \subset R[T^{\pm 1}]$ gegeben ist.

Aufgabe 2. Seien X, Y zwei R-Schemata, und A eine Algebra über dem Ring R. Verifizieren Sie, dass der kanonische Morphismus

$$X \times_{\operatorname{Spec}(A)} Y \longrightarrow X \times_{\operatorname{Spec}(R)} Y$$

eine abgeschlossene Einbettung ist.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und $K \subset E$ eine endliche Galois-Erweiterung, mit Galois-Gruppe $G = \operatorname{Gal}(E/K)$. Beweisen Sie, dass das Faserprodukt

$$X = \operatorname{Spec}(E) \times_{\operatorname{Spec}(K)} \operatorname{Spec}(E)$$

aus genau $n = [E : K] = \operatorname{ord}(G)$ Punkten besteht, deren Restekörper isomorph zu E ist.

Aufgabe 4. Sei $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \cup \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ die affine Gerade mit verdoppeltem Nullpunkt. Zeigen Sie, dass X nicht separiert ist, also dass die Einbettung

$$\Delta_X : X \longrightarrow X \times X$$

keine abgeschlossene Einbettung ist.

Abgabe: Bis Montag, den 14.11.2011 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.