Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 11/12

Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Blatt 3

Aufgabe 1. Sei X ein Schema, $a \in X$ ein Punkt, und E eine Vektorraum über dem Restekörper $\kappa(a)$. Wir definieren eine abelsche Prägarbe $\mathcal{E}$ durch

$$\Gamma(V, \mathcal{E}) = \begin{cases} E & \text{wenn } a \in V; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass diese Prägarbe dem Garbenaxiom genügt, eine kanonische $\mathcal{O}_X$-Modulstruktur trägt, und quasikohärent ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass Produkte von quasikohärenten Garben im Allgemeinen nicht mehr quasikohärent sind.

Aufgabe 3. Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata, und $Y' \subset Y$ das abgeschlossenes Unterschema zu einem quasikohärenten Ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_Y$. Zeigen Sie, dass f genau dann über Y' faktorisiert, wenn die kanonische Verkettung

$$\mathcal{I}_{f(x)} \subset \mathcal{O}_{Y,f(x)} \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{O}_{X,x}$$

für alle $x \in X$ die Nullabbildung ist.

Aufgabe 4. Sei X ein Schema und $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ zwei quasikohärente Ideale. Finden Sie die richtige Definition für die Untergarben

$$\mathcal{I} \cap \mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X \quad \text{und} \quad \mathcal{I} + \mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X,$$

und zeigen Sie, dass diese Garben quasikohärent sind.

Abgabe: Bis Montag, den 07.11.2011 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.

Prüfungen: Wie üblich werden *mündliche Prüfungen* am Ende der Vorlesungszeit sowie am Ende des Semesters durchgeführt. *Zulassungsvoraussetzung* ist das Erreichen von 20% der Gesamtpunktzahl auf den dreizehn Übungszettel, also $42 = \lceil 13 \cdot 16 \cdot 0,2 \rceil$ Punkte.