

Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei (X, \mathcal{O}_X) ein lokal geringter Raum. Zeigen Sie, dass die Teilmengen $U \subset X$, die zugleich offen und abgeschlossen sind, den idempotenten globalen Schnitte $e \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ entsprechen, also den Elementen mit der Eigenschaft $e^2 = e$.

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum und G eine abstrakte Gruppe. Wir definieren eine abelschen Prägarbe \mathcal{P} vermöge

$$\Gamma(V, \mathcal{P}) = G, \quad V \subset X \text{ offen,}$$

wobei alle Restriktionen die Identitätsabbildung sind. Beschreiben Sie die Garbifizierung $G_X = \mathcal{P}^+$.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring, M ein R -Modul, $f \in R$ ein Ringelement, und $S = \{1, f, f^2, \dots\}$ das davon erzeugte multiplikative System. Wir definieren ein System M_n von R -Moduln, indiziert durch $n \in \mathbb{Z}$, vermöge

$$M_n = M, \quad M_n \longrightarrow M_m, \quad a \longmapsto f^{m-n}a, \quad \text{für } n \leq m.$$

Konstruieren Sie eine kanonische Abbildung

$$\varinjlim_{n \in \mathbb{Z}} M_n \longrightarrow S^{-1}M$$

und zeigen Sie, dass diese bijektiv ist.

Aufgabe 4. Sei (X, \mathcal{O}_X) ein geringter Raum und \mathcal{F}, \mathcal{G} zwei \mathcal{O}_X -Moduln. Wir definieren das Tensorproduct $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ als die Garbifizierung der Prägarbe

$$V \longmapsto \Gamma(V, \mathcal{F}) \otimes_{\Gamma(V, \mathcal{O}_X)} \Gamma(V, \mathcal{G}).$$

Konstruieren Sie kanonische Abbildungen

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x \longrightarrow \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x, \quad x \in X$$

und weisen Sie nach, dass diese bijektiv sind.

Abgabe: Bis Montag, den 31.10.2011 um 8:15 Uhr in den Zettelkästen.

Literaturempfehlungen:

Robin Hartshorne: Algebraic Geometry. Springer, Berlin, 1977. Das unübertroffenen Standardlehrbuch. Geschrieben, um Schemata einem breiten Kreis zugänglich zu machen. Wenn Sie sich ein Buch zur Vorlesung anschaffen wollen, so sollten sie dieses wählen.

David Mumford: The red book of varieties and schemes. Springer, Berlin, 1988. Sehr prägnante Darstellung, insbesondere der Eigentümlichkeiten von Schemata.

Quing Liu: Algebraic geometry and arithmetic curves. Oxford University Press, Oxford, 2002. Originelle Herangehensweise jüngerer Datums, ohne historischen Ballast, mit Betonung der Schemata über \mathbb{Z} .

Igor Shafarevich: Basic Algebraic Geometry. Springer, Berlin, 1977. Ein klassischer Text, in dem auch auf historische Bezüge und Verbindungen zur komplexen Analysis eingegangen wird.

Alexander Grothendieck, Jean Dieudonné: Eléments de Géométrie Algébrique I. Springer, Berlin, 1971. Dies ist der als Buch erschienene erste Band der EGA's, die als Artikel in der Zeitschrift Publ. Math., Inst. Haute Étud. Sci. in den Nummern 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32 erschienen sind. Es handelt es sich um ein umfassendes Werk, in dem die Theorie der Schemata akribisch entwickelt wird. Schwere französische Kost, auf lange Sicht aber sehr lohnend.