Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 11

Übungen zur Kommutativen Algebra & Geometrie

Blatt 1

Aufgabe 1. Wir fassen $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{C}[T]$ vermöge der Multiplikation

$$(m, f) \cdot (n, g) = (mn, fg)$$

als Ring auf. Bestimmen sie alle Ideale $\mathfrak{a} \subset R$.

Aufgabe 2. Sei k ein Körper, T eine Unbestimmte, und V ein $k[T]$-Modul. Wir betrachten die k-lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow V, \quad x \longmapsto Tx.$$

Beweisen Sie, dass eine Abbildung $f : V \to V$ genau dann ein Homomorphismus von $k[T]$-Moduln ist, wenn Sie k-linear ist und mit φ kommutiert.

Aufgabe 3. Beweisen oder wiederlegen Sie:

(i) Restklassenmoduln eines zyklischen Moduls sind zyklisch.

(ii) Untermoduln eines zyklischen Moduls sind zyklisch.

(iii) Restklassenmoduln eines freien Moduls sind frei.

(iv) Untermoduln eines freien Moduls sind frei.

Aufgabe 4. Ist $M = \mathbb{Q}$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul? Ist er zyklisch?

Abgabe: Bis Montag, den 18.04.2011 um 8:30 Uhr im Zettelkasten.

Quorum zur Zulassung zur mündlichen Prüfung:
20% der erreichbaren Punkte = 0,2 x 11 Zettel x 20 Punkte = 44 Punkte

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 11

Übungen zur Kommutativen Algebra & Geometrie

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen. Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f : M_1 \to N_1$ und $g : M_4 \to N_4$ gibt so, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

kommutativ wird.

Aufgabe 2. Seien x, y, z drei Unbestimmte, und $K = \mathbb{Q}(x, y, z)$ der Körper der Brüche zum Polynomring $R = \mathbb{Q}[z, y, z]$. Wir betrachten die Matrizen

$$A = \big(x, y, z\big) \in \mathrm{Mat}_{1\times 3}(R) \quad \text{und} \quad A^t = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 1}(R).$$

Finden Sie eine explizite Matrix $B \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(R)$ so, dass die Sequenz von Vektorräumen

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{A^t} K^3 \xrightarrow{B} K^3 \xrightarrow{A} K \longrightarrow 0$$

exakt wird.

Aufgabe 3. Beweisen Sie mit dem Zornschen Lemma, dass jeder Vektorraum eine Basis enthält.

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum. Für jede offene Teilmenge $U \subset X$ bezeichne $\mathcal{C}(U)$ die Gruppe aller stetigen Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$. Sei nun $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Zeigen Sie, dass die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}(U) \xrightarrow{\ r\ } \prod_{i \in I} \mathcal{C}(U_i) \xrightarrow{\ s\ } \prod_{i,j \in I} \mathcal{C}(U_i \cap U_j)$$

exakt ist. Hierbei sind r und s die Abbildungen

$$f \longmapsto (f|_{U_i})_{i \in I} \qquad \text{bzw.} \qquad (f_i)_{i \in I} \longmapsto (f_i|_{U_i \cap U_j} - f_j|_{U_i \cap U_j})_{i,j \in I}.$$

Dabei bezeichnet beispielsweise $f|_{U_i}$ die Einschränkung einer auf U definierten Funktion f auf die Teilmenge $U_i \subset U$.

Abgabe: Bis Montag, den 02.05.2011 um 8:30 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 11

Übungen zur Kommutativen Algebra & Geometrie

Blatt 3

Aufgabe 1. Sei k ein Körper, und $A, B \in \mathrm{Mat}_n(k)$ zwei Matrizen, und $k \subset k'$ eine Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass A, B über k konjugiert sind genau dann, wenn sie über k' konjugiert sind.

Aufgabe 2. Sei k ein Körper. Bestimmen Sie die rationale Normalform einer Jordan-Matrix der Form

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_n(k).$$

Aufgabe 3. Sei R ein Hauptidealring, und M, N, T drei endlich erzeugte R-Moduln. Angenommen, es gilt $M \oplus T \simeq N \oplus T$. Beweisen Sie, dass dann auch $M \simeq N$ gelten muss.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring, M ein R-Modul von endlicher Länge, und $f : M \to M$ eine lineare Abbildung. Wir setzen

$$U = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{Ker}(f^n) \quad \text{und} \quad V = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}(f^n).$$

Beweisen Sie, dass die kanonische Abbildung

$$f : U \oplus V \longrightarrow M, \quad (a, b) \longmapsto a + b$$

bijektiv ist („Fittings Lemma”).

Abgabe: Bis Montag, den 09.05.2011 um 8:30 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 11

Übungen zur Kommutativen Algebra & Geometrie

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei $q = p^n$ eine Primzahlpotenz. Verifizieren Sie, dass der Raum

$$X = \operatorname{Spec}(\mathbb{F}_q[T])$$

unendlich viele Punkte enthält.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring, $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal, und $\mathfrak{p}_i \subset R$, $i \in I$ die Familie aller Primideale, welche $\mathfrak{a}$ enthalten. Zeigen Sie, dass

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{p}_i.$$

Aufgabe 3. Beschreiben Sie den topologischen Raum $X = \operatorname{Spec}(\mathbb{R}[T])$ sowie die durch die Inklusion $\mathbb{R}[T] \subset \mathbb{C}[T]$ induzierte stetige Abbildung

$$\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[T]) \longrightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{R}[T])$$

in expliziter Weise.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring und $X = \operatorname{Spec}(R)$. Beweisen Sie, dass der topologische Raum X genau dann zusammenhängend ist, wenn für alle $f, g \in R$ mit

$$f + g = 1, \quad f^2 = f, \quad g^2 = g$$

bereits $f = 0, g = 1$ oder $f = 1, g = 0$ gelten muss.

Abgabe: Bis Montag, den 16.05.2011 um 8:30 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 11

Übungen zur Kommutativen Algebra & Geometrie

Blatt 5

Aufgabe 1. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung von topologischen Räumen, und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Wir definieren eine Prägarbe $f_*(\mathcal{F})$ auf Y durch

$$\Gamma(V, f_*(\mathcal{F})) = \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{F}),$$

mit Restriktionsabbildungen

$$\mathrm{res}_U^V = \mathrm{res}_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(V)}.$$

Verifizieren Sie, dass diese Prägarbe eine Garbe ist („direkte Bildgarbe").

Aufgabe 2. Sei R ein Ring und $S \subset R$ ein multiplikatives System. Verifizieren Sie, dass die Relation

$$(a, s) \sim (a', s') \quad \Longleftrightarrow \quad \exists t \in S \text{ mit } t(as' - a's) = 0$$

auf $R \times S$ eine Äquivalenzrelation ist, und dass die beiden Verknüpfungen

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + a's}{ss'} \quad \text{und} \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'}$$

auf $S^{-1}R$ wohldefiniert sind.

Aufgabe 3. Wir betrachten den Ring

$$R = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}.$$

Skizzieren Sie den topologischen Raum $X = \mathrm{Spec}(R)$ und berechnen Sie für alle 24 Elemente $f \in R$ die Lokalisierung R_f.

Aufgabe 4. Sei R ein Hauptidealring, $R \subset K$ der Körper seiner Brüche, und $R \subset A \subset K$ ein Zwischenring. Zeigen Sie, dass $A = S^{-1}R$ für ein geeignetes multiplikatives System $S \subset R$. Verallgemeinert sich diese Tatsache auf beliebige integre Ringe R?

Abgabe: Bis Montag, den 23.05.2011 um 8:30 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 11

Übungen zur Kommutativen Algebra & Geometrie

Blatt 6

Aufgabe 1. Sei k ein Körper, $A = k[T]$ der Polynomring, und $R = k[T^2, T^3]$ der Unterring aller Polynome ohne linearen Term. Verifizieren Sie, dass für jedes $f \in (T^2, T^3)$ die kanonische Abbildung

$$\varphi : R_f \longrightarrow A_f, \quad \frac{g}{f^n} \longmapsto \frac{g}{f^n}$$

zwischen den Lokalisierungen bijektiv ist.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring und $\varphi : M \to N$ eine lineare Abbildung zwischen R-Moduln. Angenommen,

$$\operatorname{Spec}(R) = D(f_1) \cup \ldots \cup D(f_n), \quad f_i \in R$$

ist eine offenen Überdeckung des Spektrums. Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung φ bijektiv ist genau dann, wenn die induzierten Abbildungen auf den Lokalisierungen

$$\varphi_i : M_{f_i} \longrightarrow N_{f_i}, \quad \frac{a}{f_i^n} \longmapsto \frac{\varphi(a)}{f_i^n}$$

für $1 \leqslant i \leqslant n$ bijektiv sind.

Aufgabe 3. Sei k ein Körper und $R = k[T_1, T_2]$ der Polynomring in zwei Unbestimmten. Wir betrachten den topologischen Raum $X = \operatorname{Spec}(R)$ und die offenen Teilmenge

$$U = D(T_1) \cup D(T_2) = \{x_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \neq (T_1, T_2)\}.$$

Beweisen Sie, dass die Restriktionsabbildung

$$R = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$$

bijektiv ist. Folgern Sie, dass die offene Menge U nicht von der Form $D(f)$, $f \in R$ ist.

Aufgabe 4. Beschreiben Sie explizit die stetige Abbildung

$$f : \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[T]) \longrightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{Q}[T]),$$

welche durch die kanonische Inklusion $\mathbb{Q}[T] \subset \mathbb{C}[T]$ induziert wird.

Abgabe: Bis Montag, den 30.05.2011 um 8:30 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 11

Übungen zur Kommutativen Algebra & Geometrie

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei R ein Hauptidealring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Beschreiben Sie den Träger $\mathrm{Supp}(M) \subset \mathrm{Spec}(R)$ vermöge der Elementarteiler von M.

Aufgabe 2. Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass das Nakayama-Lemma für Moduln, die nicht endlich erzeugt sind, im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring, M ein endlich erzeugter R-Modul, und

$$x \in \mathrm{Supp}(M).$$

Beweisen Sie, dass es einen nichttrivialen Homomorphismus $M \to R/\mathfrak{p}$ gibt, wobei $\mathfrak{p} \subset R$ das Primideal zum Punkt $x \in \mathrm{Spec}(R)$ ist.

Aufgabe 4. Sei $p > 0$ eine Primzahl. Wir betrachten den lokalen Ring

$$R = \mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \notin p\mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{Q}.$$

Zeigen Sie, dass der R-Modul $M = \mathbb{Q}/R$ nicht noethersch, aber artinsch ist.

Abgabe: Bis Montag, den 06.06.2011 um 8:30 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 11

Übungen zur Kommutativen Algebra & Geometrie

Blatt 8

Aufgabe 1. Sei R ein Ring, und

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_0 \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von endlich erzeugten R-Moduln, mit P projektiv und $F_0, \ldots, F_n$ frei. Zeigen Sie, dass dann

$$P \oplus R^{\oplus m} \simeq R^{\oplus n}$$

für gewisse $m, n \geq 0$ gelten muss.

Aufgabe 2. Verifizieren Sie, dass $P = \mathbb{Q}$ kein projektiver Modul über dem Ring $R = \mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring, und P ein endlich erzeugter projektive R-Modul, und $F = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R$ ein freier R-Modul vom unendlichen Rank. Beweisen Sie, dass dann

$$P \oplus F \simeq F$$

gelten muss.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring, und I ein projektiver Modul mit

$$I \oplus R^{\oplus n} \simeq R^{\oplus n+1}.$$

Beweisen Sie mit Hilfe von äußeren Potenzen, dass dann $I \simeq R$.

Abgabe: Bis Montag, den 20.06.2011 um 8:30 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 11

Übungen zur Kommutativen Algebra & Geometrie

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei T eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass dann

$$T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0.$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie die abelsche Gruppe

$$\mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/20\mathbb{Z}.$$

Aufgabe 3. Sei R ein Ring, und M, N zwei R-Moduln, und $S \subset R$ ein multiplikatives System. Zeigen Sie, dass

$$S^{-1}(M \otimes_R N) = S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N,$$

im Sinne einer kanonischen Identifizierung.

Aufgabe 4. Seien M, N zwei Moduln über einem lokalem Ring R. Zeigen Sie mit dem Nakayama-Lemma:

$$M \otimes_R N = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad M = 0 \text{ oder } N = 0.$$

Folgern Sie daraus, dass

$$\mathrm{Supp}(M \otimes_R N) = \mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{Supp}(N)$$

für endlich erzeugte Moduln über beliebigen Ringen R gilt.

Abgabe: Bis Montag, den 27.06.2011 um 8:30 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 11

Übungen zur Kommutativen Algebra & Geometrie

Blatt 10

Aufgabe 1. Verifizieren Sie, dass der Ring

$$R = \mathbb{C}[X, Y]/(X^2 - Y^3)$$

kein Dedekind-Ring ist.

Aufgabe 2. Sei R ein Dedekind-Ring und I ein invertierbarer R-Modul. Zeigen Sie, dass es einen invertierbaren R-Modul J mit

$$I \oplus J = R^{\oplus 2}$$

gibt. Ist dieser Modul eindeutig?

Aufgabe 3. Sei R ein integrer noetherscher Ring. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

(i) R ist ein Dedekind-Ring

(ii) R ist lokal ein Dedekind-Ring.

(iii) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset R$ ist die Lokalisierung $R_\mathfrak{m}$ ein Hauptidealring.

Aufgabe 4. Sei R ein Dedekind-Ring, und P, P', Q drei endlich erzeugte projektive R-Moduln mit $Q \neq 0$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Aus $P \oplus Q \simeq P' \oplus Q$ folgt $P \simeq P'$.

(ii) Aus $P \otimes Q \simeq P' \otimes Q$ folgt $P \simeq P'$.

Abgabe: Bis Montag, den 04.07.2011 um 8:30 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 11

Übungen zur Kommutativen Algebra & Geometrie

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei R ein lokaler noetherscher Ring und $\mathfrak{m} \subset R$ sein maximales Ideal. Verifizieren Sie mit dem Nakayama-Lemma, dass

$$\bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n = 0$$

gilt.

Aufgabe 2. Sei H ein Halbring. Konstruieren Sie einen Ring $\tilde{H}$ und einen Homomorphismus von Halbringen $f : H \to \tilde{H}$ mit der folgenden universellen Eigenschaft: Zu jedem Ring R und jedem Homomorphismus von Halbringen $g : H \to R$ gibt es genau einen Homomorphismus von Ringen $\tilde{g} : \tilde{H} \to R$, welches das Diagramm

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & \tilde{H} \arrow[dl, "\tilde{g}"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring, P ein endlich erzeugter projektiver R-Modul vom Rang $m \geq 0$, und

$$f : P \longrightarrow P$$

ein Endomorphismus. Wir schreiben $P \oplus Q = R^{\oplus m+n}$ für einen weiteren projektiven R-Modul Q, und betrachten den Endomorphismus

$$F : R^{\oplus m+n} \longrightarrow R^{\oplus m+n}, \quad a + b \longmapsto f(a),$$

wobei $a \in P$ und $b \in Q$. Sei $\chi_F \in R[T]$ das zugehörige charakteristische Polynom von F. Man definiert das charakteristische Polynom von f durch

$$\chi_f = \chi_F / T^n.$$

Zeigen Sie, dass diese rationale Funktion nicht von der Wahl von Q abhängt und tatsächlich ein Polynom ist.

Aufgabe 4. Seien $A \subset B \subset C$ drei Ringerweiterungen. Beweisen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(i) C ist ganz über A.

(ii) C ist ganz über B, und B ist ganz über A.

Abgabe: Bis Montag, den 11.07.2011 um 8:30 Uhr im Zettelkasten.