Aufgabe 1: Um die Wirkung eines Medikaments gegen Migräne zu untersuchen, wird es einer Testgruppe von 200 Patienten verabreicht und gleichzeitig einer Kontrollgruppe von ebenfalls 200 Patienten ein Placebo verabreicht. Es stellt sich heraus, dass das Medikament in der Testgruppe nach eigener Aussage bei 50 Personen anschlägt. Darüber hinaus sei bekannt, dass 1% der Patienten angeben geheilt zu sein, obwohl sie ein Placebo bekommen haben. Es wird nun zufällig einer der 400 Patienten ausgewählt. Bezeichnen Sie mit A, B die folgenden Ereignisse:

$$A \;\hat{=}\; \text{Der Patient stammt aus der Kontrollgruppe.}$$
$$B \;\hat{=}\; \text{Der Patient gibt an geheilt zu sein.}$$

a) Benutzen Sie obige Angaben zur Festlegung der Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(A^c)$, der bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(B|A)$ und $P(B|A^c)$, sowie $P(B^c|A)$ und $P(B^c|A^c)$. (3 Punkte)

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der ausgewählte Patient nicht mehr über Migräne klagt. (4 Punkte)

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Patient aus der Kontrollgruppe stammt für den Fall, dass er angibt geheilt zu sein. (3 Punkte)

Hinweis: Runden Sie die Ergebnisse auf 3 Nachkommastellen!

a) $P(A) = 0{,}5 = P(A^c)$ 1

$P(B|A) = 0{,}01$ 1 $\qquad P(B^c|A) = 0{,}99$

$P(B|A^c) = 0{,}25$ 1 $\qquad P(B^c|A^c) = 0{,}75$

b) $P(B) = P(B|A)\,P(A) + P(B|A^c)\,P(A^c) = 0{,}01 \cdot 0{,}5 + 0{,}25 \cdot 0{,}5$ 2 1

$= 0{,}005 + 0{,}125 = 0{,}13$ 1

c) $P(A|B) = \dfrac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)} = \dfrac{0{,}01 \cdot 0{,}5}{0{,}13} \approx 0{,}038$ 2 1

Aufgabe 2: Der Pharma-Konzern Hatschi gibt auf dem Beipackzettel eines seiner Nasensprays an, dass bei 2 von 100 Anwendern Nebenwirkungen (Kopfschmerzen) auftreten. Nun kommt der Verdacht auf, die Wahrscheinlichkeit p für Nebenwirkungen sei höher. Der Konzern möchte dies natürlich widerlegen und daher signifikant zum Niveau $\alpha = 0{,}05$ nachweisen, dass die Wahrscheinlichkeit p sogar kleiner ist, als die auf der Packungsbeilage angegebene Wahrscheinlichkeit p_0. Es soll also die Hypothese $H_0 : p \geq p_0$ gegen die Alternative $H_1 : p < p_0$ getestet werden. Dazu wird das Spray $n = 240$ Patienten verabreicht. Anschließend geben 6 Patienten an, bei Ihnen seien Kopfschmerzen aufgetreten. Wir gehen dabei davon aus, dass die Patienten unabhängig voneinander auf das Medikament reagieren.

a) Begründen Sie, warum Hypothese und Alternative für das vorliegende Testproblem wie oben angegeben gewählt werden (und nicht etwa umgekehrt). (2 Punkte)

b) Geben Sie die genaue Testvorschrift an und bestimmen Sie den kritischen Wert c. Verwenden Sie dazu die beigefügte Tabelle. (6 Punkte)

c) Welche Entscheidung ist aufgrund der vorliegenden Beobachtung zu treffen? (2 Punkte)

$p_0 = \frac{2}{100}$, $\alpha = 0{,}05$, $n = 240$

a) Was signifikant nachgewiesen werden soll, muss als Alternative formuliert werden (hier: WS für Nebenwirkungen ist kleiner als angegeben) 2

b) $X \hat{=}$ Anzahl Patienten mit NW

unterer Binomialtest:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x < c \\ 0 & x \geq c \end{cases} \quad 2$$

$$E_0(\varphi) = P(X < c) = \sum_{k=0}^{c-1} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k} \leq \alpha = 0{,}05 \quad 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=c}^{n} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k} \geq 1-\alpha = 0{,}95 \quad 1$$

Nebenbed.: $\sum_{k=c+1}^{n} p_0^k \binom{n}{k} (1-p_0)^{n-k} < 0{,}95$ 1

Tabelle: $c = 2$ 1

c) $6 > 2 \Rightarrow$ Die Hypothese kann nicht verworfen werden

2

Aufgabe 3: In einem bestimmten Krankenhaus betrage die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine schwangere Frau genau ein Kind bekommt, $\frac{3}{4}$. Die Wahrscheinlichkeit für Zwillinge betrage $\frac{1}{6}$ und die Wahrscheinlichkeit einer Fehlgeburt sei $\frac{1}{12}$. (Drillingsgeburten etc. seien vernachlässigbar.) In einer bestimmten Zeitperiode entbinden in diesem Krankenhaus 120 Frauen. Für $1 \leq i \leq 120$ bezeichne $X_i \in \{0, 1, 2\}$ die Zufallsvariable, die die Anzahl der Kinder der i-ten Frau angibt. Sei $X := \sum_{i=1}^{120} X_i$ die Anzahl der in dieser Zeitperiode in diesem Krankenhaus zur Welt gekommenen Kinder.

a) Bestimmen Sie die Verteilung von X_i, $1 \leq i \leq 120$, indem Sie die Zähldichte $P(X_i = k)$ für $k = 0, 1, 2$ angeben (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie zunächst Erwartungswert $E(X_i)$ und Varianz $Var(X_i)$ von X_i, $1 \leq i \leq 120$, und zeigen Sie anschließend $E(X) = 130$ und $Var(X) \approx 29{,}17$. (2 Punkte)

c) Bestimmen Sie mithilfe einer Normalapproximation (mit Stetigkeitskorrektur) anhand der beigefügten Tabelle näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass insgesamt mindestens 110 und höchstens 140 Kinder geboren werden, also $P(110 \leq X \leq 140)$. (6 Punkte)

a) $P(X_i = 0) = \frac{1}{12}$, $\quad P(X_i = 1) = \frac{3}{4}$, $\quad P(X_i = 2) = \frac{1}{6}$

b) $E(X_i) = \frac{1}{12} \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{3}{4} + \frac{2}{6} = \frac{9+4}{12} = \frac{13}{12}$

$E(X_i^2) = \frac{3}{4} \cdot 1^2 + \frac{1}{6} \cdot 2^2 = \frac{3}{4} + \frac{4}{6} = \frac{9+8}{12} = \frac{17}{12}$

$Var(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = \frac{17}{12} - \left(\frac{13}{12}\right)^2 = \frac{17}{12} - \frac{169}{144} = \frac{35}{144}$

$E(X) = 120\, E(X_i) = 130$

$Var(X) = 120\, Var(X_i) = \frac{4200}{144} \approx 29{,}17$

c) $P(110 \leq X \leq 140) = P(X \leq 140{,}5) - P(X \leq 109{,}5)$

$= P\left(\frac{X-130}{\sqrt{29{,}17}} \leq \frac{140{,}5 - 130}{\sqrt{29{,}17}}\right) - P\left(\frac{X-130}{\sqrt{29{,}17}} \leq \frac{109{,}5 - 130}{\sqrt{29{,}17}}\right)$

$\approx \Phi\left(\frac{10{,}5}{\sqrt{29{,}17}}\right) - \Phi\left(\frac{-20{,}5}{\sqrt{29{,}17}}\right) \approx \Phi(1{,}94) - \Phi(-3{,}80)$

$= \Phi(1{,}94) - (1 - \Phi(3{,}80)) \approx 0{,}973810 - (1-1) = 0{,}973810$

Aufgabe 4: Ein fairer Würfel wird zweimal geworfen. Betrachten Sie die Ereignisse

$A \;\hat{=}$ Es wird ~~genau~~ mindestens eine 3 geworfen.
$B \;\hat{=}$ Die Augensumme beträgt 7.
$C \;\hat{=}$ Die Augensumme beträgt 8.

a) Geben Sie ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmodell (Ω, P) an und bestimmen sie $|\Omega|$. (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$, $P(B)$ und $P(C)$. (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$ und $P(B \cap C)$. (3 Punkte)

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim zweimaligen Würfeln mindestens eine durch 2 teilbare Zahl zu werfen? (2 Punkte)

a) $\left.\begin{array}{l}\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2 \\ P \text{ Laplace-Verteilung}\end{array}\right\}$ 1

$|\Omega| = 6^2 = 36$ 1

b) $A = \{3 \text{ im ersten Wurf}\} \cup \{3 \text{ im 2. Wurf}\}$

$P(A) = P(3 \text{ im 1. Wurf}) + P(3 \text{ im 2. Wurf}) - P((3,3))$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$ 1

<u>oder</u> $A = \{(3,1), \ldots, (3,6), (1,3), \ldots, (6,3)\}$

((3,3) nicht doppelt zählen!)

$|A| = 11$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{11}{36}$

$B = \{(1,6), (2,5), \ldots, (6,1)\}$ $\quad |B| = 6$ $\quad P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ 1

$C = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$ $\quad |C| = 5$ $\quad P(C) = \frac{5}{36}$ 1

c) $P(A \cap B) = P(\{(3,4), (4,3)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ 1

$P(A \cap C) = P(\{(3,5), (5,3)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ 1

$P(B \cap C) = P(\emptyset) = 0$ 1

d) $D = \{ \underbrace{(2,1),\dots,(2,6)}_{6}, \underbrace{(4,1),\dots,(4,6)}_{6}, \underbrace{(6,1),\dots,(6,6)}_{6}, \underbrace{(1,2),(3,2),(5,2)}_{3}, \underbrace{(1,4),\dots,(5,4)}_{3}, \underbrace{(1,6),\dots,(5,6}_{3}$

$\Rightarrow |D| = 3 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 18 + 9 = 27$

$P(D) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$

<u>oder</u> $P(D) = P(\{(i,j) \in \Omega : i \in \{2,4,6\}\}) + P(\{(i,j) \in \Omega : j \in \{2,4,6\}\})$

$- P(\{(i,j) \in \Omega : i,j \in \{2,4,6\}\})$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

2