Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 2010/11

Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 12

Aufgabe 1. Sei $f \in k[X,Y,Z]_+$ homogen und $g \in k[\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}]$ seine Homogenisierung bezüglich Z. Rechnen Sie nach, dass die Homogenisierung der partiellen Ableitung $\partial f/\partial X$ mit der partiellen Ableitung $\partial g/\partial \frac{X}{Z}$ übereinstimmt.

Aufgabe 2. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper von Charakteristik $p > 0$, mit Primkörper $\mathbb{F}_p \subset k$, und $d \geq 1$ eine ganze Zahl. Wieviele verschiedene algebraische Mengen $C \subset \mathbb{P}^2(k)$ der Form

$$C = V_+(f) \subset \mathbb{P}^2(k)$$

gibt es, wobei f ein homogenes Polynom vom Grad d mit Koeffizienten aus dem Primkörper $\mathbb{F}_q$?

Aufgabe 3. Skizzieren Sie die abgeschlossene Teilmenge

$$C = V_+(XY + Z^2) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

auf den drei offenen Teilmengen $D_+(X), D_+(Y), D_+(Z)$ und beschreiben Sie den Raum C in der klassischen Topologie.

Aufgabe 4. Sei $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ eine Quadrik. Angenommen, es gibt einen Punkt

$$x = (a : b : c) \in C,$$

mit homogenen Koordinaten $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Beweisen Sie, dass es dann unendlich viele solcher Punkte gibt.

Abgabe: Bis Freitag, den 21.01. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.