Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 2010/11

Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ ein graduierter Ring, der integer ist, und $f \in S$, $f \neq 0$ ein homogenes Element. Zeigen Sie, dass dann auch jeder Teiler von f homogen ist.

Aufgabe 2. Sei $S = k[X, Y, Z]$ der Polynomring in drei Unbestimmten.

(i) Wir versehen S zunächst mit der Standardgraduierung. Bestimmen Sie die Vektorraumdimensionen $\dim_k(S_d)$ für $0 \leqslant d \leqslant 10$.

(ii) Sei nun S mit der Graduierung ausgestattet, welche durch

$$\deg(X) = 1, \quad \deg(Y) = 2, \quad \text{und} \quad \deg(Z) = 3$$

gegeben ist. Berechnen Sie auch in diesem Fall $\dim_k(S_d)$ für $0 \leqslant d \leqslant 10$.

Aufgabe 3. Seien $F_0, \ldots, F_n \in k[X_0, \ldots, X_m]$ homogene Elemente mit festem Grad $d > 0$ so, dass

$$V(F_0, \ldots, F_n) = \{(0, \ldots, 0)\}$$

als Teilmenge vom $\mathbb{A}^{m+1}(k)$. Zeigen Sie, dass die durch

$$(a_0 : \ldots : a_m) \longrightarrow (F_0(a_0, \ldots, a_m), \ldots, F_n(a_0, \ldots, a_m))$$

definierte Abbildung $f : \mathbb{P}^m(k) \to \mathbb{P}^n(k)$ wohldefiniert und stetig ist.

Aufgabe 4. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $S = k[X_0, \dots, X_n]$ der Polynomring mit der Standardgraduierung, und $\mathfrak{a} \subset S_+$ ein homogenes Ideal. Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$V_+(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{P}^n(k)$$

leer ist genau dann, wenn $\mathfrak{a}$, aufgefasst als Untervektorraum des k-Vektorraumes S, von endlicher Kodimension ist.

Abgabe: Bis Montag, den 10.01.2011 um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

Frohe Weihnachten und guten Rutsch!