Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 2010/11

Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 9

Aufgabe 1. Zeichnen Sie für das Flächenwort

$$aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$$

das Bild der Randkanten des entsprechenden regulären 8-Ecks in der zugehörigen 2-Mannigfaltigkeit $T = T^2 \# T^2$.

Aufgabe 2. Sei (V, K) ein endlicher simplizialer Komplex, C^i der zugehörige $\mathbb{Q}$-Vektorraum der i-Koketten, und $\partial : C^i \to C^{i+1}$ die durch die Formel

$$\partial(f)[x_0, \ldots, x_{i+1}] = \sum_{r=0}^{i+1} (-1)^r f[x_0, \ldots, \widehat{x}_r, \ldots, x_{i+1}]$$

gegebene Korandabbildung. Rechnen Sie nach, dass die Verkettung

$$C^{i-1} \xrightarrow{\partial} C^i \xrightarrow{\partial} C^{i+1}$$

die Nullabbildung ist.

Aufgabe 3. Sei K ein endlicher simplizialer Komplex von Dimension 2. Seien $e = e(K)$ und $b_i = k_i(K)$, $i = 0, 1, 2$ seine Euler-Charakteristik bzw. Betti-Zahlen. Zeigen Sie, dass gilt:

$$e = b_0 - b_1 + b_2.$$

Tip: Betrachten Sie die Korandabbildungen

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{\partial} C^1 \xrightarrow{\partial} C^2 \xrightarrow{\partial} C^3 \longrightarrow 0$$

und verifizieren Sie mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen, dass die Wechselsumme e der Dimensionen $\dim_{\mathbb{Q}}(C^i)$ mit der Wechselsumme der Dimensionen $b_i = \dim_{\mathbb{Q}}(Z^i/B^i)$ übereinstimmt. Verallgemeinerung?

Aufgabe 4. Sei k ein Körper. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{P}^n(k) \longrightarrow \left\{ H \subset k^{n+1} \mid H \subset k^{n+1} \text{ Hyperebene} \right\},$$

welche ein $(\lambda_0 : \ldots : \lambda_n) \in \mathbb{P}^n(k)$ auf den Kern der durch die $1 \times (n+1)$-Matrix

$$A = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$$

beschriebenen linearen Abbildung $A : k^{n+1} \to k$ schickt, wohldefiniert und bijektiv ist. Erinnerung: Eine *Hyperebene* ist ein Untervektorraum von Kodimension eins.

Abgabe: Bis Freitag, den 17.12. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.