Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 2010/11

Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 6

Aufgabe 1. Sei k ein unendlicher Körper, und $g_1, \ldots, g_r \in k[X_1, \ldots, X_n]$ endlich viele Polynome mit $g_1, \ldots, g_n \neq 0$. Zeigen Sie, dass es ein Punkt $x = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n(k)$ gibt mit

$$g_i(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$$

für alle $1 \leqslant i \leqslant n$.

Aufgabe 2. Sei $C \subset \mathbb{A}^2(k)$ eine Kurve, gegeben durch ein quadratfreies $f \in k[X, Y]$, und $x = (a, b) \in C$. Angenommen, das Polynom f wird als formale Potenzreihe in $X - a$, $Y - b$ reduzibel. Zeigen Sie, dass dann $x \in \operatorname{Sing}(C)$ gilt.

Aufgabe 3. Beweisen Sie für jeden rationalen Exponenten $r \in \mathbb{Q}$, dass

$$(1 + X)^r = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{r}{i} X^i$$

im formalen Potenzreihenring $\mathbb{Q}[[X]]$ gilt. Hierbei ist der Binomialkoeffizient für $r \in \mathbb{Q}$, $i \in \mathbb{N}$ definiert als

$$\binom{r}{i} = \frac{r(r-1)\ldots(r-i+1)}{i!} \in \mathbb{Q}$$

Aufgabe 4. Sei R ein Ring und $f \in R[[X, Y]]$ eine formale Potenzreihe mit $f \neq 0$. Zeigen Sie, dass es ein $d \geq 1$ gibt mit der Eigenschaft $f(T^d, T) \neq 0$.

Abgabe: Bis Freitag, den 26.11. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.