Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 2010/11

Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 5

Aufgabe 1. Berechnen Sie den singulären Ort $\mathrm{Sing}(C)$ der komplexen Kurven $C \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$, die durch folgende Polynome gegeben werden:

(i) $X^4 - Y^4 + X^3Y^2$

(ii) $X^n + Y^n + nXY + (n-2)$.

Aufgabe 2. Sei $n > 1$ eine natürliche Zahl. Für welche Primzahlen $p > 0$ ist die durch das ganzzahlige Polynom $f = X^n - 1 - Y^2$ definierte Kurve $C_p \subset \mathbb{A}^2(\bar{\mathbb{F}}_p)$ glatt?

Aufgabe 3. Sei $f \in \mathbb{Z}[X,Y]$ ein ganzzahliges Polynom, und $C \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ sowie $C_p \subset \mathbb{A}^2(\bar{\mathbb{F}}_p)$ die dadurch definierten Kurven. Angenommen, die komplexe Kurve C is glatt. Beweisen Sie, dass für fast alle Primzahlen $p > 0$ auch die Kurven C_p glatt sind.

Aufgabe 4. Sei $C \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ die Kurve, welche durch das reduzible Polynom

$$f = X^3Y - Y^2 = (X^3 - Y)Y$$

definiert wird. Bestimmen Sie den Umgebungsrand $L(C, 0)$ der Kurve C am Nullpunkt $0 = (0,0)$ als Verschlingung in der 3-Sphäre.

Abgabe: Bis Freitag, den 19.11. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.