Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 2010/11

Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei R ein Ring und

$$f = aX^2 + bX + c \quad \text{und} \quad g = a'X^2 + b'X + c'$$

zwei quadratische Polynome über R. Verifizieren Sie die Formel

$$\operatorname{res}(f, g) = (ac' - ca')^2 + (bc' - cb')(ba' - ab').$$

Aufgabe 2. Sei R ein Ring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset R$ zwei Ideale. Das *Produktideal* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subset R$ ist das von den Produkten fg mit $f \in \mathfrak{a}$, $g \in \mathfrak{b}$ erzeugte Ideal. Zeigen Sie, dass

$$\sqrt{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}}.$$

Folgern Sie daraus, dass für alle Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ gilt:

$$V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$$

als Teilmengen im $\mathbb{A}^n(k)$.

Aufgabe 3. Sei k ein Körper. Wir identifizieren den affinen n-Raum $\mathbb{A}^n(k)$ mit der Menge der normierten Polynome $f \in k[Y]$ vom Grad $\deg(f) = n$, vermöge

$$(a_1, \ldots, a_n) \longmapsto Y^n + a_1 Y^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Sei U die Menge aller *separablen Polynome*, also solchen, die über dem algebraischen Abschluss $k \subset \bar{k}$ keine multiplen Wurzeln haben. Zeigen Sie mit Hilfe der Resultante, dass $U \subset \mathbb{A}^n(k)$ eine offene Teilmenge ist.

Aufgabe 4. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei geordnete Mengen, und $V : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sowie $I : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ zwei Abbildungen mit folgenden Eigenschaften:

- Die beiden Abbildungen V und I sind *monoton fallend*, mit anderen Worten, $a \leqslant a' \Rightarrow V(a) \geqslant V(a')$ und $b \leqslant b' \Rightarrow I(b) \geqslant I(b')$.
- Die beiden Verkettungen VI und IV sind *ansteigend*, das heisst $a \leqslant IV(a)$ und $b \leqslant VI(b)$.

Folgern Sie daraus, dass die Abbildungen V und I zueinander inverse Bijektionen zwischen den Bildern $V(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ und $I(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$ induzieren. Erörtern Sie diese Tatsache im Kontext der Galois-Theorie sowie der Algebraischen Geometrie.

Abgabe: Bis Freitag, den 12.11. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.