Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 2010/11

Einführung in die Algebraische Geometrie

Blatt 3

Aufgabe 1. Bestimmen Sie jeweils das Radikal $\sqrt{(f)}$ zu folgenden Hauptidealen $(f) \subset R$:

(i) Im Ring $R = \mathbb{Z}$ mit $f = 1728$.

(ii) Im Ring $R = \mathbb{C}[X]$ mit $f = X^3 - iX^2 + X - i$.

(iii) Im Ring $R = \mathbb{R}[X]$ mit $f = X^2 + X + 1$.

(iv) Im Ring $R = \mathbb{C}[X, Y]$ mit $f = X^4 - XY^3 - YX^3 + Y^4$.

Aufgabe 2. Sei $\mathfrak{a} \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal. Zeigen Sie mit dem Hilbertschen Basissatz, dass es eine natürliche Zahl $n \geq 0$ mit folgender Eigenschaft gibt:

$$f \in \sqrt{\mathfrak{a}} \quad \Longleftrightarrow \quad f^n \in \mathfrak{a}.$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass der topologische Raum $\mathbb{A}^n(k)$ noethersch ist. Mit anderen Worten: Jede aufsteigende Folge von offenen Teilmengen $U_0 \subset U_1 \subset \ldots$ ist stationär.

Aufgabe 4. Sei k algebraisch abgeschlossen, und $f, g \in k[X_1, \ldots, X_n]$ zwei Polynome. Angenommen, die Verschwindungsmenge $V(g) \subset \mathbb{A}^n(k)$ enthält $V(f)$, und das Polynom $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ ist irreduzibel. Folgern Sie mit dem Hilbertsche Nullstellensatz, dass f ein Teiler von g ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 05.11. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.