Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2010

Algebra

Blatt 12

Aufgabe 1. Sei K ein Körper und $f = aX^2 + bX + c \in K[X]$ ein quadratisches Polynom. Zeigen Sie, dass f separabel ist genau dann, wenn die Diskriminante $\delta = b^2 - 4ac$ nicht verschwindet. Beachten Sie dabei insbesondere den Fall $\mathrm{Char}(K) = 2$.

Aufgabe 2. Wir betrachten das Polynom $f = X^3 - X^2 - 14X + 24$. Berechnen Sie mit dem euklidischen Algorithmus

$$g = \mathrm{ggT}(f, f') \in K[X]$$

jeweils über den Körpern $K = \mathbb{Q}$ und $K = \mathbb{F}_7$ und entscheiden Sie, ob $f \in K[X]$ separabel ist.

Aufgabe 3. Sei Ω ein algebraisch abgeschlossener Körper von Charakteristik $p > 0$, und $n = p^e m$ mit m prim zu p. Bestimmen sie die Ordnung der Gruppe der n-ten Einheitswurzeln

$$\mu_n(\Omega) = \{\zeta \in \Omega \mid \zeta^n = 1\} \subset \Omega^\times.$$

Aufgabe 4. Seien $K \subset L \subset E$ und $K \subset F$ Körpererweiterungen. Verifizieren Sie, dass die Abbildung

$$E \otimes_L (L \otimes_K F) \longrightarrow E \otimes_K F, \quad \alpha \otimes \beta \otimes \gamma \longmapsto \alpha\beta \otimes \gamma$$

wohldefiniert, bijektiv, und ein Homomorphismus von Ringen ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 7.7. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.