Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2010

Algebra

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei $p > 0$ eine Primzahl. Wir betrachten die reelle Zahlen $\beta = \sqrt[3]{p} \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie für die Elemente

$$\alpha = r + s\beta + t\beta^2 \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{p}), \quad r, s, t \in \mathbb{Q}$$

den Grad und das Minimalpolynom.

Aufgabe 2. Wir betrachten die komplexe Einheitswurzeln $e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$$

für $1 \leqslant n \leqslant 7$.

Aufgabe 3. Sei $K \subset E$ eine Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass $K \subset E$ algebraisch ist genau dann, wenn jede K-Unteralgebra $L \subset E$ ein Körper ist.

Aufgabe 4. Sei $K \subset E$ eine endliche Körpererweiterung, $\alpha \in E$ ein Element, und $f \in K[X]$ sein Minimialpolynom. Wir betrachten den K-linearen Endomorphismus

$$\alpha : E \longrightarrow E, \quad x \longmapsto \alpha x.$$

Sei $\chi_\alpha \in K[X]$ dessen charakteristisches Polynom. Beweisen Sie die Formel

$$\chi_\alpha = f^{[E:K]/\deg(\alpha)}.$$

Abgabe: Bis Mittwoch, den 16.6. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

Auf der Webseite www.fsmathe.de führt die Fachschaft Mathematik eine Online-Umfrage zu ihrer Erreichbarkeit und Aktivität durch, bei der auch Mathematikbücher verlost werden.