Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2010

Algebra

Blatt 6

Aufgabe 1. Seien $m, n > 0$ zwei ganze Zahlen, sowie

$$g = \mathrm{ggT}(m,n) \quad \text{und} \quad k = \mathrm{kgV}(m,n)$$

ihr größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsame Vielfache. Zeigen Sie, dass

$$C_m \times C_n \simeq C_k \times C_g$$

gilt.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Anzahl der Isomorphieklassen der kommutativen Gruppen G von Ordnung $n = 32$ sowie $n = 1500$.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring und $I \subset R$ ein Ideal. Das *Radikal* von $I \subset R$ ist definiert als die Teilmenge

$$\sqrt{I} = \{a \in R \mid \text{es gibt ein } n \geq 0 \text{ mit } a^n \in I\}$$

Verifizieren Sie die folgenden Eigenschaften:

(i) Die Teilmenge $\sqrt{I} \subset R$ ist ein Ideal.

(ii) Es gilt $I \subset \sqrt{I}$ und sogar $\sqrt{I} = \sqrt{\sqrt{I}}$.

(iii) Ist $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, so $\sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring. Ein Element $a \in R$ heißt *nilpotent*, wenn $a^n = 0$ für ein $n \geq 0$. Beweisen Sie, dass ein Polynom

$$f = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in R[X]$$

genau dann nilpotent ist, wenn alle Koeffizienten $a_i \in R$ nilpotent sind.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 26.5. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.