Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2010

Algebra

Blatt 3

Aufgabe 1. Sei

$$D_4 = \langle R, S \rangle = \left\{ R^j, R^j S \mid 0 \leqslant j \leqslant 3 \right\} \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$$

die Diedergruppe der Ordnung $\mathrm{ord}(D_4) = 8$, wobei

$$R = \begin{pmatrix} e^{2\pi i/4} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i/4} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für alle acht Elemente $A \in D_4$ die Ordnung $\mathrm{ord}(A)$.

Aufgabe 2. Sei $f : G \to H$ ein Homomorphismus von Gruppen, $a \in G$ ein Element von endlicher Ordnung, und $b = f(a) \in H$ sein Bild. Zeigen Sie, dass $\mathrm{ord}(b)$ ein Teiler von $\mathrm{ord}(a)$ ist.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Wir betrachten die symmetrische Gruppe $S_{G/H}$ auf der Menge der Linksnebenklassen und den Homomorphismus von Gruppen

$$f : G \longrightarrow S_{G/H}, \quad a \longmapsto (xH \longmapsto axH).$$

Berechnen Sie $\mathrm{Ker}(f) \subset G$.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe und $\mathrm{Aut}(G)$ ihre Automorphismengruppe, also die Gruppe aller bijektiven Homomorphismen $f : G \to G$. Wir betrachten die Abbildung

$$i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G), \quad a \longmapsto (x \longmapsto axa^{-1}).$$

(i) Rechnen Sie nach, dass $i : G \to \mathrm{Aut}(G)$ ein Homomorphismus von Gruppen ist.

(ii) Man bezeichnet das Bild von i als die Gruppe der *inneren Automorphismen* $\mathrm{Inn}(G) \subset \mathrm{Aut}(G)$. Verifiziere Sie, dass $\mathrm{Inn}(G) \simeq G/Z(G)$ gilt, wobei

$$Z(G) = \{a \in G \mid ax = xa \text{ für alle } x \in G\}$$

das *Zentrum* von G ist.

(iii) Zeigen Sie, dass die Untergruppe $\mathrm{Inn}(G) \subset \mathrm{Aut}(G)$ normal ist.

Bemerkung: Man bezeichnet die Restklassengruppe $\mathrm{Out}(G) = \mathrm{Aut}(G)/\,\mathrm{Inn}(G)$. als die Gruppe der *äußeren Automorphismen.*

Abgabe: Bis Mittwoch den 5.5. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.