Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2010

Algebra

Blatt 1

Aufgabe 1. Sei $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $r, \varphi \in \mathbb{R}$, und $n \geq 1$. Geben Sie alle $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\omega^n = z$ in Polarkoordinaten an.

Aufgabe 2. Sei $X^3 + pX + q \in \mathbb{C}[X]$ ein kubisches Polynom. Dessen drei Nullstellen sind nach der Cardanoschen[1] Formel von der Form

$$\omega = u + v,$$

wobei

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2}},$$

und die beiden dritten Wurzeln unter der Nebenbedingung $uv = -p/3$ zu ziehen sind. Verifizieren Sie die Cardanosche Formel durch Einsetzen von ω in das Polynom.

Aufgabe 3. Sei $Z \subset \mathbb{C}$ die Teilmenge aller komplexen Zahlen, die sich aus $0, 1 \in \mathbb{C}$ *nur* mit Zirkel konstruieren lassen. Beweisen Sie, dass $Z \subset \mathbb{C}$ eine Untergruppe ist.

Bemerkung: Der frappierende Satz von Mohr-Mascheroni[2] besagt, dass die Teilmenge aller mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punkte mit der Teilmenge aller nur mit Zirkel konstruierbaren Punkte übereinstimmt.

[1] Gerolamo Cardano (1501–1576), italenischer Arzt, Mathematiker und Astrologe.
[2] Georg Mohr (1640–1697), dänischer Mathematiker; Lorenzo Mascheroni (1750–1800), italienischer Mathematiker.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß die 5-te Einheitswurzel $\zeta = e^{2\pi i/5} \in \mathbb{C}$ den Realteil $\mathrm{Re}(\zeta) = (\sqrt{5}-1)/4$ besitzt. Benutzen Sie dafür, daß ζ eine Wurzel von

$$\frac{X^5-1}{X-1} = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

ist, und sich dieses Polynom vom Grad 4 mit dem Ansatz $Y = X + X^{-1}$ aus dem quadratische Polynom

$$Y^2 + Y - 1$$

gewinnen lässt.

Abgabe: Bis Mittwoch den 21.4. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

Schriftliche Prüfungen: Es wird 13 Übungsblätter geben, jeweils mit 4 Aufgaben, pro Aufgabe können 5 Punkte erreicht werden. Um zur schriftlichen Prüfung zugelassen zu werden, müssen Sie regelmäßig an den Übungen teilnehmen und 40% = 104 Übungspunkte erlangen.

Klausur:	Montag der 19.07.2010 von 9:00–11:00 Uhr in HS 5D, 5F.
Nachklausur:	Montag der 27.09.2010 von 9:00–11:00 Uhr im HS 5C.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2010

Algebra

Blatt 2

Aufgabe 1. Geben Sie die Linksnebenklassen von $\mu_4(\mathbb{C}) \subset \mu_{12}(\mathbb{C})$ explizit an. Ebenso für $\mu_3(\mathbb{C}) \subset \mu_{12}(\mathbb{C})$.

Aufgabe 2. Welche der folgenden Teilmengen der Gruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q})$ ist eine Untergruppe?

(i) Die Teilmenge aller ganzzahligen Matrizen.

(ii) Die Teilmenge aller ganzzahligen Matrizen A mit $\det(A) = \pm 1$.

(iii) Die Teilmenge aller diagonalisierbaren Matrizen.

(iv) Die Teilmenge aller Matrizen B mit $\det(B) > 0$.

(v) Die Teilmenge aller Matrizen C mit $\det(C) < 0$.

Aufgabe 3. Sei $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ die Gruppe aller ganzzahligen 2×2-Matrizen mit Determinante 1, und $D \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ die Untergruppe aller oberen Dreiecksmatrizen. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\varphi : \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})/D \longrightarrow \mathbb{Q} \cup \{1/0\}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} D \longmapsto a/c$$

wohldefiniert und bijektiv ist.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper von Charakteristik $p = 0$. Beweisen Sie, dass jedes Element $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ von endlicher Ordnung halbeinfach ist.

Abgabe: Bis Mittwoch den 28.4. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2010

Algebra

Blatt 3

Aufgabe 1. Sei

$$D_4 = \langle R, S\rangle = \left\{R^j, R^jS \mid 0 \leqslant j \leqslant 3\right\} \subset \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$$

die Diedergruppe der Ordnung $\mathrm{ord}(D_4) = 8$, wobei

$$R = \begin{pmatrix} e^{2\pi i/4} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i/4} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für alle acht Elemente $A \in D_4$ die Ordnung $\mathrm{ord}(A)$.

Aufgabe 2. Sei $f : G \to H$ ein Homomorphismus von Gruppen, $a \in G$ ein Element von endlicher Ordnung, und $b = f(a) \in H$ sein Bild. Zeigen Sie, dass $\mathrm{ord}(b)$ ein Teiler von $\mathrm{ord}(a)$ ist.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Wir betrachten die symmetrische Gruppe $S_{G/H}$ auf der Menge der Linksnebenklassen und den Homomorphismus von Gruppen

$$f : G \longrightarrow S_{G/H}, \quad a \longmapsto (xH \longmapsto axH).$$

Berechnen Sie $\mathrm{Ker}(f) \subset G$.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe und $\mathrm{Aut}(G)$ ihre Automorphismengruppe, also die Gruppe aller bijektiven Homomorphismen $f : G \to G$. Wir betrachten die Abbildung

$$i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G), \quad a \longmapsto (x \longmapsto axa^{-1}).$$

(i) Rechnen Sie nach, dass $i : G \to \mathrm{Aut}(G)$ ein Homomorphismus von Gruppen ist.

(ii) Man bezeichnet das Bild von i als die Gruppe der *inneren Automorphismen* $\mathrm{Inn}(G) \subset \mathrm{Aut}(G)$. Verifiziere Sie, dass $\mathrm{Inn}(G) \simeq G/Z(G)$ gilt, wobei

$$Z(G) = \{a \in G \mid ax = xa \text{ für alle } x \in G\}$$

das *Zentrum* von G ist.

(iii) Zeigen Sie, dass die Untergruppe $\mathrm{Inn}(G) \subset \mathrm{Aut}(G)$ normal ist.

Bemerkung: Man bezeichnet die Restklassengruppe $\mathrm{Out}(G) = \mathrm{Aut}(G)/\,\mathrm{Inn}(G)$. als die Gruppe der *äußeren Automorphismen*.

Abgabe: Bis Mittwoch den 5.5. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2010

Algebra

Blatt 4

Aufgabe 1. Finden Sie das kleinste $n \geq 1$, für das die kommutative Gruppe

$$G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \mathrm{Aut}(C_n)$$

nicht zyklisch ist.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper. Wir betrachten die Untergruppen

$$S, D \subset T \subset \mathrm{GL}(n, K),$$

wobei T die Gruppe aller oberen Dreiecksmatrizen, D die Gruppe aller Diagonalmatrizen, und S die Gruppe aller oberen Dreiecksmatrizen mit Diagonaleinträgen $\lambda_{ii} = 1$. Zeigen Sie, dass $T = S \rtimes_\varphi D$ ein semidirektes Produkt ist, und bestimmen die den Homomorphismus $\varphi : D \to \mathrm{Aut}(S)$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass für jede Gruppe G das Folgende gilt:

$$\mathrm{ord}(G) > 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Aut}(G) \neq \{\mathrm{id}_G\}.$$

Aufgabe 4. Wir betrachten die Quaternionengruppe

$$Q = \{\pm E, \pm I, \pm J, \pm IJ\} \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}).$$

(i) Bestimmen Sie alle Untergruppen $P \subset Q$, und entscheiden Sie, welche davon normal sind.

(ii) Ist die Gruppe Q isomorph zu einem semidirekten Produkt $H \rtimes_\varphi K$ für gewisse Gruppen $H, K \neq \{e\}$?

Abgabe: Bis Mittwoch, den 12.5. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2010

Algebra

Blatt 5

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung $n = 255$ zyklisch ist.

Aufgabe 2. Sei G eine endliche Gruppe, $p > 0$ eine Primzahl, und $H \subset G$ eine Sylow-p-Untergruppe. Sei nun $K \subset G$ irgendeine normale Untergruppe. Zeigen Sie, dass

$$H \cap K \subset K$$

eine Sylow[3]-p-Untergruppe von K ist.

Aufgabe 3. Wir betrachten die endliche Gruppe $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$.

(i) Geben Sie eine Sylow-p-Untergruppen $H \subset G$ an.

(ii) Zeigen Sie, dass die Sylow-p-Untergruppen $H \subset G$ den Folgen von Untervektorräumen

$$0 = U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \ldots \subsetneq U_n = \mathbb{F}_p^{\oplus n}$$

entsprechen.

(iii) Folgern Sie, dass es genau

$$s_p = \prod_{i=1}^{n} \frac{p^i - 1}{p - 1}$$

Sylow-p-Untergruppen $H \subset G$ gibt.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe von Ordnung $n = 60$, die keine normale Untergruppe $H \subset G$ mit $H \neq \{e\}, G$ enthält. Benutzen Sie die Konjugationswirkung auf der Menge $X = \mathrm{Syl}_2(G)$ um zu beweisen, dass G isomorph zur alternierenden Gruppe A_5 sein muss.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 19.5. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

[3]Ludwig Sylow (1832–1918), norwegischer Lehrer.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2010

Algebra

Blatt 6

Aufgabe 1. Seien $m, n > 0$ zwei ganze Zahlen, sowie

$$g = \mathrm{ggT}(m,n) \quad \text{und} \quad k = \mathrm{kgV}(m,n)$$

ihr größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsame Vielfache. Zeigen Sie, dass

$$C_m \times C_n \simeq C_k \times C_g$$

gilt.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Anzahl der Isomorphieklassen der kommutativen Gruppen G von Ordnung $n = 32$ sowie $n = 1500$.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring und $I \subset R$ ein Ideal. Das *Radikal* von $I \subset R$ ist definiert als die Teilmenge

$$\sqrt{I} = \{a \in R \mid \text{es gibt ein } n \geq 0 \text{ mit } a^n \in I\}$$

Verifizieren Sie die folgenden Eigenschaften:

(i) Die Teilmenge $\sqrt{I} \subset R$ ist ein Ideal.

(ii) Es gilt $I \subset \sqrt{I}$ und sogar $\sqrt{I} = \sqrt{\sqrt{I}}$.

(iii) Ist $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, so $\sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring. Ein Element $a \in R$ heißt *nilpotent*, wenn $a^n = 0$ für ein $n \geq 0$. Beweisen Sie, dass ein Polynom

$$f = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in R[X]$$

genau dann nilpotent ist, wenn alle Koeffizienten $a_i \in R$ nilpotent sind.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 26.5. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2010

Algebra

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei R ein faktorieller Ring und $K = \{a/b \mid a, b \in R \text{ und } b \neq 0\}$ der Körper der Brüche. Sei

$$f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \in R[X]$$

ein normiertes Polynom. Rechnen Sie nach, dass jede Wurzel $a/b \in K$ von f bereits in R liegt.

Aufgabe 2. Sei R ein faktorieller Ring, der kein Körper ist. Verifizieren Sie, dass der faktorielle Ring $R[X]$ kein Hauptidealring ist.

Aufgabe 3. Sei k ein Körper. Zeigen Sie, dass der Ring $A = k[[X]]$ aller formalen Potenzreihen

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_i X^i, \qquad a_i \in k$$

euklidisch ist, und bestimmen Sie die Einheitengruppe $A^\times$.

Aufgabe 4. Sei R ein euklidischer Ring. Beweisen Sie, dass auch der Ring $A = R[[X]][X^{-1}]$ der *formalen Laurent-Reihen*

$$f = \sum_{i=n}^{\infty} a_i X^i, \qquad n \in \mathbb{Z} \text{ und } a_i \in R$$

euklidisch ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 2.6. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2010

Algebra

Blatt 8

Aufgabe 1. Sind die Polynome

$$f = 14X^5 + 175X^2 + 325 \in \mathbb{Z}[X]$$

und

$$g = T^2X^5 + (T^3 + T + 1)X + (T - 1) \in \mathbb{Z}[T][X]$$

primitiv?

Aufgabe 2. Sei K ein endlicher Körper. Zeigen Sie, dass es irreduzible Polynome $f \in K[X]$ vom Grad $\deg(f) = 2$ geben muss.

Aufgabe 3. (i) Verifizieren Sie mit dem Reduktionskriterium, dass das Polynom

$$f = X^3 + \frac{11}{16}X + \frac{21}{16} \in \mathbb{Q}[X]$$

irreduzibel ist.

(ii) Zeigen Sie mit dem Eisenstein-Kriterium, dass das Polynom

$$g = X^{10} + T^2X^8 - 2TX^8 + X^8 + TX^6 - X^6 + T^4 - 1 \in \mathbb{Q}[T][X]$$

irreduzibel ist.

Aufgabe 4. Zerlegen Sie das Polynom

$$f = x^4 + 19x^3 + 57x^2 + 68x + 44$$

über $\mathbb{Q}$ in irreduzible Faktoren.

Abgabe: Bis Mittwoch den 9.6. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2010

Algebra

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei $p > 0$ eine Primzahl. Wir betrachten die reelle Zahlen $\beta = \sqrt[3]{p} \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie für die Elemente

$$\alpha = r + s\beta + t\beta^2 \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{p}), \quad r, s, t \in \mathbb{Q}$$

den Grad und das Minimalpolynom.

Aufgabe 2. Wir betrachten die komplexe Einheitswurzeln $e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$$

für $1 \leqslant n \leqslant 7$.

Aufgabe 3. Sei $K \subset E$ eine Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass $K \subset E$ algebraisch ist genau dann, wenn jede K-Unteralgebra $L \subset E$ ein Körper ist.

Aufgabe 4. Sei $K \subset E$ eine endliche Körpererweiterung, $\alpha \in E$ ein Element, und $f \in K[X]$ sein Minimialpolynom. Wir betrachten den K-linearen Endomorphismus

$$\alpha : E \longrightarrow E, \quad x \longmapsto \alpha x.$$

Sei $\chi_\alpha \in K[X]$ dessen charakteristisches Polynom. Beweisen Sie die Formel

$$\chi_\alpha = f^{[E:K]/\deg(\alpha)}.$$

Abgabe: Bis Mittwoch, den 16.6. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

Auf der Webseite www.fsmathe.de führt die Fachschaft Mathematik eine Online-Umfrage zu ihrer Erreichbarkeit und Aktivität durch, bei der auch Mathematikbücher verlost werden.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2010

Algebra

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei $K \subset E$ eine algebraische Körpererweiterung und $\alpha, \beta \in E$. Angenommen, die Grade

$$m = \deg(\alpha) \quad \text{und} \quad n = \deg(\beta)$$

sind relativ prim. Verifizieren Sie, dass der Körper $L = K(\alpha, \beta)$ den Grad $[L : K] = mn$ hat.

Aufgabe 2. Sei $p > 0$ eine Primzahl und $\mathbb{F}_p \subset \Omega$ ein algebraischer Abschluss. Wir betrachten endliche Unterkörper

$$\mathbb{F}_{p^m}, \mathbb{F}_{p^n} \subset \Omega.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}_{p^m} \subset \mathbb{F}_{p^n}$ gilt genau dann, wenn $m \mid n$.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und $K \subset \Omega$ ein algebraischer Abschluss.

(i) Beweisen Sie, dass K und Ω als Mengen gleichmächtig sind, falls K unendlich ist.

(ii) Zeigen Sie, dass Ω abzählbar unendlich ist, falls K endlich ist.

Aufgabe 4. Sei $K \subset E$ eine Körpererweiterung. Beweisen Sie, dass der Ring $A = E \otimes_K E$ genau dann ein Körper ist, wenn $K = E$ gilt.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 23.6. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

Wegen des *Sport Dies* fällt die Vorlesung am Mittwoch, den 23.06.2010 aus. Das Übungsblatt 11 wird bereits am Montag, den 21.06.2010 ausgeteilt.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2010

Algebra

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei K ein endlicher Körper. Verifizieren Sie, dass jede endliche Körpererweiterung $K \subset E$ normal ist und von der Form $E = K(\alpha)$ für ein $\alpha \in E$ sein muss.

Aufgabe 2. Geben Sie ein explizites Beispiel für Körpererweiterungen

$$\mathbb{Q} \subset L \subset E$$

an so, dass $\mathbb{Q} \subset E$ normal ist, aber $\mathbb{Q} \subset L$ nicht normal ist.

Aufgabe 3. Sei K Körper und $K \subset \Omega$ ein algebraischer Abschluss. Zeigen Sie, dass jeder K-Homomorphismus $\sigma : \Omega \to \Omega$ bijektiv sein muss, also ein K-Isomorphismus ist. Gilt diese Eigenschaft auch noch für Homomorphismen die auf $K \subset \Omega$ nicht notwendigerweise die Identität sind?

Aufgabe 4. Sei K ein Körper, $K \subset \Omega$ ein algebraischer Abschluss, und

$$K \subset E_i \subset \Omega, \quad i \in I$$

eine Familie von Zwischenkörpern. Angenommen, die $K \subset E_i$ sind normal. Beweisen Sie, dass dann auch

$$K \subset \bigcap_{i \in I} E_i \quad \text{und} \quad K \subset K(\bigcup_{i \in I} E_i)$$

normal sind.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 30.6. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2010

Algebra

Blatt 12

Aufgabe 1. Sei K ein Körper und $f = aX^2 + bX + c \in K[X]$ ein quadratisches Polynom. Zeigen Sie, dass f separabel ist genau dann, wenn die Diskriminante $\delta = b^2 - 4ac$ nicht verschwindet. Beachten Sie dabei insbesondere den Fall $\mathrm{Char}(K) = 2$.

Aufgabe 2. Wir betrachten das Polynom $f = X^3 - X^2 - 14X + 24$. Berechnen Sie mit dem euklidischen Algorithmus

$$g = \mathrm{ggT}(f, f') \in K[X]$$

jeweils über den Körpern $K = \mathbb{Q}$ und $K = \mathbb{F}_7$ und entscheiden Sie, ob $f \in K[X]$ separabel ist.

Aufgabe 3. Sei Ω ein algebraisch abgeschlossener Körper von Charakteristik $p > 0$, und $n = p^e m$ mit m prim zu p. Bestimmen sie die Ordnung der Gruppe der n-ten Einheitswurzeln

$$\mu_n(\Omega) = \{\zeta \in \Omega \mid \zeta^n = 1\} \subset \Omega^\times.$$

Aufgabe 4. Seien $K \subset L \subset E$ und $K \subset F$ Körpererweiterungen. Verifizieren Sie, dass die Abbildung

$$E \otimes_L (L \otimes_K F) \longrightarrow E \otimes_K F, \quad \alpha \otimes \beta \otimes \gamma \longmapsto \alpha\beta \otimes \gamma$$

wohldefiniert, bijektiv, und ein Homomorphismus von Ringen ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 7.7. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2010

Algebra

Blatt 13

Aufgabe 1. Sei K ein Körper von Charakteristik $\mathrm{Char}(K) \neq 2$. Zeigen Sie, dass jede quadratische Körpererweiterung $K \subset E$ galoisch ist, und $\mathrm{Gal}(E/K)$ zyklisch von Ordnung $n = 2$ ist.

Aufgabe 2. Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und $\zeta = e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Erweiterung

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\zeta)$$

galoisch ist, und das die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ abelsch ist.

Aufgabe 3. Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Wir betrachten den Körper $K = \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$. Sei α eine komplexe Zahl mit $\alpha^n \in K$. Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung

$$K \subset K(\alpha)$$

galoisch ist, und dass die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(K(\alpha)/K)$ zyklisch ist.

Aufgabe 4. Sei G eine endliche Gruppe. Konstruieren Sie einen Körper K und eine Galois-Erweiterung $K \subset E$ mit $\mathrm{Gal}(E/K) = G$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 14.7. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

Schriftliche Prüfung: Zulassungsvoraussetzung ist das Erreichen von 104 Punkten auf den Übungszetteln. Studierende, die in der Vergangenheit ohne Erfolg an einer schriftlichen Prüfung zur Algebra teilgenommen haben, sind automatisch zugelassen. Die zugelassenen Prüflinge werden durch Aushang bekannt gemacht. Verifizieren Sie, ob sie zugelassen sind. Bei Unstimmigkeiten kontaktieren Sie bitte umgehend den Dozenten.

Erlaubte Hilfsmittel: Ein Blatt mit handschriftlichen Notizen.