Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2010

Algebra

Blatt 5

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung $n = 255$ zyklisch ist.

Aufgabe 2. Sei G eine endliche Gruppe, $p > 0$ eine Primzahl, und $H \subset G$ eine Sylow-p-Untergruppe. Sei nun $K \subset G$ irgendeine normale Untergruppe. Zeigen Sie, dass

$$H \cap K \subset K$$

eine Sylow[1]-p-Untergruppe von K ist.

Aufgabe 3. Wir betrachten die endliche Gruppe $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$.

(i) Geben Sie eine Sylow-p-Untergruppen $H \subset G$ an.

(ii) Zeigen Sie, dass die Sylow-p-Untergruppen $H \subset G$ den Folgen von Untervektorräumen

$$0 = U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \ldots \subsetneq U_n = \mathbb{F}_p^{\oplus n}$$

entsprechen.

(iii) Folgern Sie, dass es genau

$$s_p = \prod_{i=1}^{n} \frac{p^i - 1}{p - 1}$$

Sylow-p-Untergruppen $H \subset G$ gibt.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe von Ordnung $n = 60$, die keine normale Untergruppe $H \subset G$ mit $H \neq \{e\}, G$ enthält. Benutzen Sie die Konjugationswirkung auf der Menge $X = \mathrm{Syl}_2(G)$ um zu beweisen, dass G isomorph zur alternierenden Gruppe A_5 sein muss.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 19.5. um 9:00 Uhr in den Zettelkästen.

[1] Ludwig Sylow (1832–1918), norwegischer Lehrer.