Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 09

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 1

Aufgabe 1. Sei $V = \mathrm{Mat}(n, K)$ und $U \subset V$ der Untervektorraum der Diagonalmatrizen. Welche Dimension hat der Quotientenvektorraum V/U?

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe. Wir betrachten die Relation

$$R = \left\{(x, x') \mid \exists g \in G \text{ mit } x' = gxg^{-1}\right\} \subset G \times G$$

auf G.

(i) Verifizieren Sie, daß dies eine Äquivalenzrelation ist.

(ii) Sei nun $G = \mathrm{GL}(n, K)$, wobei K ein algebraisch abgeschlossener Körper ist. Zeigen Sie, daß jedes $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ äquivalent zu einer oberen Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper, V und W zwei K-Vektorräume, und $H = \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Wir betrachten die Relation

$$R = \left\{(f, f') \mid \exists g \in \mathrm{Aut}_K(V),\, h \in \mathrm{Aut}_K(W) \text{ mit } f' = hfg^{-1}\right\} \subset H \times H$$

auf H.

(i) Verifizieren Sie, daß dies eine Äquivalenzrelation ist.

(ii) Sei nun V, W endlich-dimensional. Zeigen Sie, daß es genau $m+1$ Äquivalenzklassen gibt, wobei m das Minimimum vom $\dim_K(V)$ und $\dim_K(W)$ ist.

Aufgabe 4. Wir betrachten das Polynom $f = T^2 + 1$. Zeigen Sie, daß der Ring $L = \mathbb{F}_3[T]/f\mathbb{F}_3[T]$ ein Körper ist, und bestimmen Sie für jedes $\lambda \in L$, $\lambda \neq 0$ das Inverse $1/\lambda$.

Abgabe: Bis Mittwoch den 29.4. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Das griechische Alphabet

Buchstabe		Name	Transliteration
α	A	Alpha	a
β	B	Beta	b
γ	Γ	Gamma	g
δ, ∂	Δ	Delta	d
ϵ	E	Epsilon	e
ζ	Z	Zeta	z
η	H	Eta	ē
θ, ϑ	Θ	Theta	t
ι	I	Iota	i
κ	K	Kappa	k
λ	Λ	Lambda	l
μ	M	Mu	m
ν	N	Nu	n
ξ	Ξ	Xi	x
o	O	Omikron	o
π	Π	Pi	p
ρ	P	Rho	r
σ	Σ	Sigma	s
τ	T	Tau	t
υ	Υ	Upsilon	u
ϕ, φ	Φ	Phi	ph
χ	X	Chi	kh
ψ	Ψ	Psi	ps
ω	Ω	Omega	ō

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 09

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 2

Aufgabe 1. Wir betrachten auf der Menge $\mathrm{Mat}(n, K)$ die Äquivalenzrelation

$$B \sim A \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es gibt } S, T \in \mathrm{GL}(n, K) \text{ mit } B = SAT^{-1}.$$

Sei X die Menge der Äquivalenzklassen. Sind die Abbildungen

$$X \longrightarrow K, \quad [A] \longmapsto \mathrm{Tr}(A) \quad \text{und} \quad X \longrightarrow \mathbb{N}, \quad [A] \longmapsto \mathrm{rank}(A)$$

wohldefiniert?

Aufgabe 2. Sei $H \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ der reelle Untervektorraum aller Hermiteschen Matrizen, und $D \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ der Untervektorraum aller Diagonalmatrizen. Berechnen Sie die Dimension der $\mathbb{R}$-Vektorräume $(H + D)/D$ und $(H + D)/H$.

Aufgabe 3. Sei V ein K-Vektorraum. Ein Untervektorraum $H \subset V$ bezeichnet man als *Hyperebene* falls $\dim(V/H) = 1$ gilt. Zeigen Sie, daß jeder Untervektorraum $U \subset V$ als Durchschnitt von Hyperebenen geschrieben werden kann.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper. Wir fassen den Summenvektorraum

$$S = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K = \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \mid \lambda_n \in K \text{ und } \lambda_n = 0 \text{ für fast alle } n\}$$

in kanonischer Weise als Untervektorraum des Produktvektorraumes

$$P = \prod_{n=0}^{\infty} K = \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \mid \lambda_n \in K\}$$

auf. Beweisen Sie, daß der Quotientenvektorraum $V = P/S$ unendlich-dimensional ist. (Tip: Konstruieren Sie einen Endomorphismus $f : V \to V$, der surjektiv aber nicht injektiv ist.)

Abgabe: Bis Mittwoch den 6.5. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 09

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 3

Aufgabe 1. Sei V ein K-Vektorraum, $U \subset V$ ein Untervektorraum, und $x_1, \ldots, x_m \in U$ eine Basis. Wir ergänzen dies zu einer Basis $x_1, \ldots, x_n \in V$. Zeigen Sie, daß die Restklassen

$$[x_{m+1}], [x_{m+2}], \ldots, [x_n] \in V/U$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -8 & 3 & 0 \\ -14/3 & 8/3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{Q}).$$

alle Eigenwerte sowie die zugehörigen geometrischen und algebraischen Multiplizitäten, und entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3. Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$. Beweisen Sie, daß A genau dann nilpotent ist, wenn A trigonalisierbar und $\mathrm{Tr}(A^2) = 0$ gilt.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie für die neun Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{F}_3),$$

ob A trigonalisierbar, halbeinfach oder diagonalisierbar ist.

Abgabe: Bis Mittwoch den 13.5. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 09

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum von Dimension ≥ 2. Ist die Teilmenge der nilpotenten Endomorphismen $N \subset \mathrm{End}(V)$ ein Untervektorraum?

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ eine obere Dreiecksmatrix. Zeigen Sie, daß die Matrix A genau dann nilpotent ist, wenn ihre Diagonaleinträge verschwinden.

Aufgabe 3. Sei $p > 0$ eine Primzahl, und $U \subset \mathbb{F}_p[T]$ der Untervektorraum aller Polynome vom Grad $d \leqslant 5$, und

$$\partial/\partial T : U \longrightarrow U, \quad T^i \longmapsto iT^{i-1}$$

der nilpotente Endomorphismus, der ein Polynom auf seine formale Ableitung schickt. Bestimmen Sie die Jordan-Normalform

$$J = \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{m_s}(0) \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(6, \mathbb{F}_p), \quad m_1 \geq \ldots \geq m_s$$

von $\partial/\partial T$ in Abhängigkeit von der Charakteristik p.

Aufgabe 4. Sei $p \geq 0$ eine Primzahl. Beweisen Sie, daß es genau p^2 nilpotente Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{F}_p)$ gibt. (Sie dürfen die Tatsache benutzen, daß in $\mathbb{F}_p^\times$, $p \neq 2$ genau die Hälfte der Elemente Quadrate sind.)

Abgabe: Bis Mittwoch den 20.5. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 09

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 5

Aufgabe 1. Prüfen Sie, daß die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{Q})$$

trigonalisierbar ist, und berechnen Sie Ihre Jordan-Normalform.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß jede nichttrigonalisierbare Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$ halbeinfach ist, das heißt über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar wird.

Aufgabe 3. Sei $p > 0$ eine Primzahl. Beweisen Sie mittels Jordan-Normalform, daß es genau

$$\frac{p^3 + 9p^2 + 8p}{6}$$

Konjugationsklassen von trigonalisierbaren Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{F}_p)$ gibt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß jede trigonalisierbare Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ das Produkt

$$A = S \cdot S'$$

von zwei symmetrischen Matrizen $S, S' \in \mathrm{Mat}(n, K)$ ist. (Tip: Lösen Sie zunächst den Spezialfall, daß $A = J_n(\lambda)$ eine Jordan-Matrix ist, beispielsweise

$$J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & \end{pmatrix},$$

und reduziern Sie den allgemeinen Fall mittels Jordan-Normalform auf diesen Spezialfall.)

Abgabe: Bis Mittwoch den 27.5. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 09

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 6

Aufgabe 1. Wir betrachten den Endomorphismus

$$f : \mathrm{Mat}(n, \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Mat}(n, \mathbb{Q}), \quad A \longmapsto A^t,$$

der eine $n \times n$-Matrix auf ihre Transponierte abbildet. Bestimmen Sie zu f das Minimalpolynom $\mu_f \in \mathbb{Q}[T]$ und die Jordan-Normalform $J \in \mathrm{Mat}(n^2, \mathbb{Q})$.

Aufgabe 2. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein trigonalisierbarer Endomorphismus. Zeigen Sie, daß es einen diagonalisierbaren Endomorphismus $f_d : V \to V$ und einen nilpotenten Endomorphismus $f_n : V \to V$ gibt mit $f = f_d + f_n$ und $f_d \circ f_n = f_n \circ f_d$.

Aufgabe 3. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom bzw. Minimalpolynom von der Form

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{r} (T - \lambda_i)^{m_i} \quad \text{und} \quad \mu_f = \prod_{i=1}^{r} (T - \lambda_i)^{m_i - 1}$$

für paarweise verschieden Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ ist. Zeigen Sie, daß damit die Jordan-Normalform von f festgelegt ist, und rechnen Sie diese aus.

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ eine trigonalisierbare Matrix. Zeigen Sie mittels Jordan-Normalform, daß die Matrix A zu ihrer transponierten Matrix A^t konjugiert ist.

Abgabe: Bis Mittwoch den 3.6. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 09

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei V ein K-Vektorraum, und $V^{**} = (V^*)^*$ sein Bidualraum. Rechnen Sie nach, daß die Bidualitätsabbildung

$$b : V \longrightarrow V^{**}, \quad x \longmapsto (f \mapsto f(x))$$

linear ist.

Aufgabe 2. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $h : V \to V$ ein Endomorphismus, und $h^* : V^* \to V^*$ der duale Endomorphismus. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $\chi_h = \chi_{h^*}$ und $\mu_h = \mu_{h^*}$.

(ii) Der Endomorphismus $h : V \to V$ ist genau dann trigonalisierbar, diagonalisierbar bzw. halbeinfach, wenn die entsprechende Eigenschaft für den Endomorphismus $h^* : V^* \to V^*$ gilt.

Aufgabe 3. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $f \in V^*$ eine Linearform, und $y \in V$ ein Vektor mit $f(y) \neq 0$. Wir betrachten den Endomorphismus

$$s : V \longrightarrow V, \quad x \longmapsto x - 2\frac{f(x)}{f(y)}y.$$

Verifizieren Sie, daß die Abbildung s linear ist, und bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_s \in K[T]$ sowie die Jordan-Normalform $J \in \mathrm{Mat}(n, K)$.

Aufgabe 4. Seien V, W zwei endlich-dimensionaler K-Vektorräume von gleicher Dimension, und $f : V \to V$ und $g : W \to W$ zwei trigonalisierbare Endomorphismen. Zeigen Sie, daß f, g genau dann die gleiche Jordan-Normalform haben, wenn

$$\operatorname{rank}(f - \lambda \operatorname{id}_V)^i = \operatorname{rank}(g - \lambda \operatorname{id}_W)^i$$

für alle Skalare $\lambda \in K$ und alle $i \geq 0$ gilt.

Abgabe: Bis Mittwoch den 10.6. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 8

Aufgabe 1. Wir betrachten im Polynomring den Untervektorraum

$$U = \{p \in \mathbb{C}[T] \mid \deg(p) \leqslant 3\},$$

versehen mit der Basis $x_0 = 1, x_1 = T, x_2 = T^2, x_3 = T^3$. Schreiben Sie die Linearform

$$f : U \longrightarrow \mathbb{C}, \quad p \longmapsto p(1+i)$$

als Linearkombination in der Dualbasis $x_0^*, \ldots, x_3^* \in U^*$.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper von Charakteristik $\mathrm{Char}(K) \neq 2$.

(i) Rechnen Sie nach, daß jede Matrix der Form $G = S^t S$ mit $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ symmetrisch ist.

(ii) Sei nun K so beschaffen, daß jeder Skalar $\lambda \in K$ ein Quadrat ist. Beweisen Sie, daß jede symmetrische Matrix $G \in \mathrm{GL}(n, K)$ von der Form $G = S^t S$ für ein $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ ist.

Aufgabe 3. Wir definieren auf dem reellen Untervektorraum $H \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ aller Hermiteschen Matrizen die Äquivalenzrelation

$$G' \sim G \quad \Longleftrightarrow \quad G' = S^t G \overline{S} \text{ für ein } S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}).$$

Zeigen Sie, daß es genau $(n+1)(n+2)/2$ Äquivalenzklassen gibt.

Aufgabe 4. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, und B der Vektorraum aller Bilinearformen $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie, daß der von den Skalarprodukten erzeugte Untervektorraum $U \subset B$ mit dem Untervektorraum der symmetrischen Bilinearformen $S \subset B$ übereinstimmt.

Abgabe: Bis Mittwoch den 17.6. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 09

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 9

Aufgabe 1. Wir betrachten die symmetrische Matrix

$$G = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R}).$$

Für welche Skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die zugehörige symmetrische Bilinearform $\Phi(x, y) = x^t G y$ auf $\mathbb{R}^2$ ein Skalarprodukt?

Aufgabe 2. Sei $V \subset \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$ der reelle Untervektorraum aller spurlosen Hermiteschen Matrizen, und

$$A = \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2), \quad z\overline{z} + w\overline{w} = 1.$$

Bestimmen Sie die Matrix $B \in \mathrm{SO}(3)$ des Automorphismus

$$\tau_A : V \longrightarrow V, \quad H \longmapsto AH\bar{A}^t$$

bezüglich der Basis

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. Sei $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinarform, und $x_1, \ldots, x_n \in V$ eine Basis mit der Eigenschaft, daß die Gram-Matrizen

$$G_k = (\Phi(x_i, x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant k} \in \mathrm{Mat}(k, \mathbb{R}), \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

invertierbar sind. Beweisen Sie, daß die Invariante $n_{-1} \geq 0$ von Φ mit der Anzahl der Vorzeichenwechsel in der reellen Zahlenfolge

$$1, \det(G_1), \det(G_2), \ldots, \det(G_n)$$

übereinstimmt.

Aufgabe 4. Sei $U \subset \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$ der reelle Untervektorraum aller Hermiteschen Matrizen. Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (H, H') \longmapsto \frac{1}{2}(\det(H) + \det(H') - \det(H + H')).$$

(i) Verifizieren, daß Φ eine symmetrische Bilinearform ist.

(ii) Wählen Sie eine Basis $H_1, \ldots, H_4 \in V$ und berechnen Sie die Gram-Matrix $G \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{R})$ von Φ dazu.

(iii) Welche Invarianten n_1, n_{-1}, n_0 hat Φ? (Sie dürfen Aufgabe 3 benutzen.)

Abgabe: Bis Mittwoch den 24.6. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Terminänderung: Die Nachklausur wird vorverlegt und findet am Freitag, dem 25.09.2009 von 9:00–11:00 Uhr im Hörsaal 5C statt.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 09

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei
$$Q = aE + bI + cJ + dK \in \mathbb{H}$$
ein Quaternion. Angenommen, es gilt $QQ' = Q'Q$ für alle Quaternionen $Q' \in \mathbb{H}$. Zeigen Sie, daß dann $b = c = d = 0$ gilt.

Aufgabe 2. Wie lautet die Jordan-Normalform einer symplektischen Transvektion?

Aufgabe 3. Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus, dessen Minimalpolynom die Form
$$\mu_f = (T - a)(T - a'), \qquad a < a'$$
hat. Seien $U, U' \subset V$ die Eigenräume zu den Eigenwerten a, a'. Beweisen Sie, daß $f : V \to V$ genau dann eine Isometrie ist, wenn $a = -1, a' = 1$ und $U, U' \subset V$ zueinander orthogonal sind.

Aufgabe 4. (i) Zeigen Sie, daß jedes $A \in \mathrm{SO}(3)$ Produkt von zwei orthogonalen Spiegelungen ist.

(ii) Finden Sie ein $B \in \mathrm{SO}(4)$, daß nicht das Produkt von zwei orthogonalen Spiegelungen ist.

Abgabe: Bis Mittwoch den 1.7. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 09

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 11

Aufgabe 1. Seien $f, g : V \to V$ zwei Endomorphismen auf einem endlich-dimensionalen unitären Vektorraum V. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) f, g unitär oder selbstadjungiert impliziert fg unitär bzw. selbstadjungiert.

(ii) f, g unitär oder selbstadjungiert impliziert $f + g$ unitär bzw. selbstadjungiert.

Aufgabe 2. Sei V ein endlich-dimensionaler unitärere Vektorraum. Zeigen Sie, daß die normalen Endomorphismen $f : V \to V$ ein Erzeugendensystem im Vektorraum $\mathrm{End}(V)$ bilden.

Aufgabe 3. Sei $f : V \to V$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraumes, und $U \subset V$ ein f-invarianter Unterraum. Zeigen Sie, daß die Einschränkung $f|_U : U \to U$ auch diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4. (i) Sei $A \in \mathrm{O}(n)$ eine Matrix, die mit allen $B \in \mathrm{O}(n)$ kommutiert. Zeigen Sie, daß dann $A = \pm E$ gilt.

(ii) Sei $A \in \mathrm{Sp}(2m, K)$ eine Matrix, die mit allen $B \in \mathrm{Sp}(2m, K)$ kommutiert. Zeigen Sie, daß dann ebenfalls $A = \pm E$ gilt.

Abgabe: Bis Mittwoch den 8.7. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 09

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 12

Aufgabe 1. Seien V, W Vektorräume und $x \in V$ und $y \in W$ Vektoren. Wir betrachten den Vektor $x \otimes y$ im Tensorprodukt $V \otimes W$. Zeigen Sie, daß $x \otimes y = 0$ genau dann gilt, wenn $x = 0$ oder $y = 0$.

Aufgabe 2. Seien V, W zwei endlich-dimensionale Vektorräume, sowie

$$f : V \to V \quad \text{und} \quad g : W \to W$$

Endomorphismen. Zeigen Sie, daß der induzierte Tensorprodukt-Endomorphismus

$$f \otimes g : V \otimes W \to V \otimes W$$

nilpotent ist genau dann, wenn f oder g nilpotent sind.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper. Fassen Sie die Tensorprodukt-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

als $4{\times}4$-Matrix $A \in \mathrm{Mat}(4, K)$ auf und berechnen sie ihre Jordan-Normalform.

Aufgabe 4. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen unitärer Vektorraums. Beweisen Sie, daß f normal ist genau dann, wenn die adjungierte Abbildung f^* ein Polynom in f ist, also $f^* = p(f)$ für ein $p \in \mathbb{C}[T]$.

Abgabe: Bis Mittwoch den 15.7. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Schriftliche Prüfung: Erlaubtes Hilfsmittel bei Klausur und Nachklausur ist ein handbeschriebenes DIN-A4 Blatt. Bringen Sie Schreibsachen und Lichtbildausweis sowie Studentenausweis mit.