Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 09

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 8

Aufgabe 1. Wir betrachten im Polynomring den Untervektorraum

$$U = \{p \in \mathbb{C}[T] \mid \deg(p) \leqslant 3\},$$

versehen mit der Basis $x_0 = 1, x_1 = T, x_2 = T^2, x_3 = T^3$. Schreiben Sie die Linearform

$$f : U \longrightarrow \mathbb{C}, \quad p \longmapsto p(1+i)$$

als Linearkombination in der Dualbasis $x_0^*, \ldots, x_3^* \in U^*$.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper von Charakteristik $\mathrm{Char}(K) \neq 2$.

(i) Rechnen Sie nach, daß jede Matrix der Form $G = S^t S$ mit $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ symmetrisch ist.

(ii) Sei nun K so beschaffen, daß jeder Skalar $\lambda \in K$ ein Quadrat ist. Beweisen Sie, daß jede symmetrische Matrix $G \in \mathrm{GL}(n, K)$ von der Form $G = S^t S$ für ein $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ ist.

Aufgabe 3. Wir definieren auf dem reellen Untervektorraum $H \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ aller Hermiteschen Matrizen die Äquivalenzrelation

$$G' \sim G \quad \Longleftrightarrow \quad G' = S^t G \overline{S} \text{ für ein } S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}).$$

Zeigen Sie, daß es genau $(n+1)(n+2)/2$ Äquivalenzklassen gibt.

Aufgabe 4. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, und B der Vektorraum aller Bilinearformen $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie, daß der von den Skalarprodukten erzeugte Untervektorraum $U \subset B$ mit dem Untervektorraum der symmetrischen Bilinearformen $S \subset B$ übereinstimmt.

Abgabe: Bis Mittwoch den 17.6. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.