Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 09

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 5

Aufgabe 1. Prüfen Sie, daß die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{Q})$$

trigonalisierbar ist, und berechnen Sie Ihre Jordan-Normalform.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß jede nichttrigonalisierbare Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$ halbeinfach ist, das heißt über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar wird.

Aufgabe 3. Sei $p > 0$ eine Primzahl. Beweisen Sie mittels Jordan-Normalform, daß es genau

$$\frac{p^3 + 9p^2 + 8p}{6}$$

Konjugationsklassen von trigonalisierbaren Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{F}_p)$ gibt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß jede trigonalisierbare Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ das Produkt

$$A = S \cdot S'$$

von zwei symmetrischen Matrizen $S, S' \in \mathrm{Mat}(n, K)$ ist. (Tip: Lösen Sie zunächst den Spezialfall, daß $A = J_n(\lambda)$ eine Jordan-Matrix ist, beispielsweise

$$J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & \end{pmatrix},$$

und reduziern Sie den allgemeinen Fall mittels Jordan-Normalform auf diesen Spezialfall.)

Abgabe: Bis Mittwoch den 27.5. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.