Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Philipp Gross SS 09

Übungen zur Linearen Algebra II

Musterlösung Blatt 11

Aufgabe 1.

(i) Seien f,g unitär, d.h. $f^* = f^{-1}$ und $g^* = g^{-1}$. Dann ist fg unitär, weil

$$(fg)^* = g^* f^* = g^{-1} f^{-1} = (fg)^{-1}$$

Seien nun f,g selbstadjungiert, d.h. $f^* = f$, $g^* = g$. Angenommen fg ist selbstadjungiert, dann kommutieren g und f

$$fg = (fg)^* = g^* f^* = gf$$

Diese Aussage ist wahr falls $\dim V = 1$. Ist $\dim V \geq 2$, so kommutieren nicht alle selbstadjungierten Endomorphismen miteinander. Das folgende Beispiel lässt sich auch auf höhere Dimensionen verallgemeinern:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Seien f,g unitär, dann ist $f+g$ i.A. nicht unitär. Zum Beispiel ist die Identität Id_V unitär, allerdings gilt für $f = g = \mathrm{Id}_V$

$$(\mathrm{Id}_V + \mathrm{Id}_V)^* = 2\,\mathrm{Id}_V \neq 2^{-1}\,\mathrm{Id}_V = (\mathrm{Id}_V + \mathrm{Id}_V)^{-1}$$

Sind f,g selbstadjungiert, so ist aber $f+g$ selbstadjungiert, weil

$$(f+g)^* = f^* + g^* = f + g$$

Aufgabe 2. Nach Wahl einer Basis können wir OE $V = \mathbb{C}^n$ mit der Standard-Sesquilinearform annehmen und $\mathrm{End}(V)$ mit $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ identifizieren. Offensichtlich bilden die Elementarmatrizen E_{ij} eine Basis von $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$, sind aber nicht normal. Wir definieren $T_{ij} = E_{ij} + E_{ji}$ und $T_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$. Dann bilden $(S_{ij})_{i \leq j}$ zusammen mit $(T_{ij})_{i<j}$ auch eine Basis von $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ mit der Eigenschaft

$$\overline{S_{ij}}^t = S_{ij}^t = S_{ij} \quad \text{und} \quad \overline{T_{ij}}^t = T_{ij}^t = -T_{ij}$$

Also sind die S_{ij} selbstadjungiert und die T_{ij} bezeichnet man als schiefadjungiert. Wie man leicht nachrechnet sind sie normal! Also haben wir eine Basis aus normalen Endomorphismen angegeben. Insbesondere bilden alle normalen Endomorphismen ein Erzeugendensystem von $\mathrm{End}(V)$.

Aufgabe 3. Nach Vorlesung ist ein Endormophismus genau dann diagonalisierbar, wenn sein Minimalpolynom in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

Insbesondere gilt dies für μ_f. Ist $U \subset V$ ein f-invarianter Unterraum, so liefert die Einschränkung von f einen Homomorphismus $g := f|_U : U \to U$, also einen Endomorphismus von U. Nach Vorlesung gilt, dass das Minimalpolynom μ_g ein Teiler von μ_f ist. Daher folgt aus obigem Kriterium die Behauptung.

Aufgabe 4. Bevor wir beginnen, beweisen wir zwei kleine Lemmata.

Lemma 1 Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums, mit der Eigenschaft, dass jeder Vektor ein Eigenvektor ist. Dann ist $f = \lambda \cdot \mathrm{Id}_V$ für ein $\lambda \in K$.

Beweis: Wir zeigen, dass es nur *einen* Eigenwert λ gibt, weil ja dann $f(x) = \lambda x$ für alle $x \in V$ gilt. Angenommen es gibt zwei verschiedene Eigenwerte $\lambda \neq \mu$. Seien x und y passende Eigenvektoren, d.h. es gelte $f(x) = \lambda x$ und $f(y) = \mu y$. Da $x + y$ nach Voraussetzung auch ein Eigenvektor ist, gibt es ein $\nu \in K$ mit $f(x+y) = \nu(x+y)$. Kombiniert man diese drei Gleichungen, erhält man $\lambda = \nu = \mu$, da x und y linear unabhängig sind.

Lemma 2 Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums, mit der Eigenschaft, dass jede Hyperebene f-invariant ist. Dann ist $f = \lambda \cdot \mathrm{Id}_V$ für ein $\lambda \in K$

Beweis: Sei H eine beliebige Hyperebene. Also Kern einer nichttrivialen Linearform $\varphi : V \to K$. Wegen $f(H) \subset H$ ist die Linearform $f^*(\varphi) = \varphi \circ f : V \to K$ auf H identisch Null. Also ist $f^*(\varphi) = \lambda \cdot \varphi$. Dies zeigt, das jedes Element $\varphi \in V^*$ ein Eigenvektor zu der dualen Abbildung $f^* : V \to V$ ist. Nach Lemma 1 ist $f^* = \lambda \cdot \mathrm{Id}_{V^*}$, also folgt $f = f^{**} = \lambda \, \mathrm{Id}_V$.

Kommen wir nun zu der eigentlichen Aufgabe. Die Menge der Elemente einer Gruppe G, welchen mit allen anderer kommutieren, bezeichnet man auch als das *Zentrum* $Z = Z(G)$

(i) Ist $A = \pm E$ so kommutiert sie offensichtlich mit jeder Matrix aus $\mathrm{O}(n)$. Um die andere Richtung zu zeigen, sei $A \in Z(\mathrm{O}(n))$ gegeben. Insbesondere kommutiert A mit allen orthogonalen Spiegelungen S_a. An der Jordan-Normalform von S_a sieht man, dass der Eigenraum V_1 zum Eigenwert 1 eine Hyperebene ist. Kommutiert A mit S_a, so ist V_1 A-invariant nach Vorlesung. Umgekehrt liefert jede Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$ eine Spiegelung S_a mit $a \in H^\perp$. Daher ist jede Hyperhebene A-invariant. Also ist $Z(\mathrm{O}(n)) = \mathbb{R}E \cap \mathrm{O}(n)$ nach Lemma 2. Um $\mathbb{R}E \cap \mathrm{O}(n) = \{\pm E\}$ einzusehen, wähle man $x \in V$ mit $\langle x, x\rangle = 1$ und beachte dass eine Isometrie λE folgendes erfüllen muss:

$$1 = \langle x, x\rangle = \langle \lambda E x, \lambda E x\rangle = \lambda^2 \langle x, x\rangle = \lambda^2.$$

Also ist $\lambda = \pm 1$.

(ii) Ist $B = \pm E$ so kommutiert sie offensichtlich mit jeder Matrix aus $\mathrm{Sp}(2m, K)$. Um die andere Richtung zu zeigen, sei $B \in Z(\mathrm{Sp}(2m, K))$ gegeben. Insbesondere kommutiert B mit allen symplektischen Transvektionen $T_{a,\rho}$. Wieder sieht man an der Jordan-Normalform von $T_{a,\rho}$, dass der Eigenraum V_1 zum Eigenwert 1 eine Hyperebene ist. Umgekehrt kann man zu jeder Hyperebene $H \subset K^{2m}$ eine symplektische Transvektion $T_{a,\rho}$ finden, welche H auf sich abbildet: Wähle $a \in H^\perp \setminus \{0\}$ und $\rho \neq 0$ beliebig. Daher ist jede Hyperebene B-invariant, also ist $Z(\mathrm{Sp}(2m, K)) = K \cdot E \cap \mathrm{Sp}(2m, K))$ nach Lemma 2. Um $K \cdot E \cap \mathrm{Sp}(2m, K) = \{\pm E\}$ zu verifizieren, wähle man $x \in V$ und $y \in V$ mit $\Phi(x, y) = 1$ und beachte dass eine Isometrie λE folgendes erfüllen muss:

$$1 = \langle x, y\rangle = \langle \lambda E x, \lambda E y\rangle = \lambda^2 \langle x, y\rangle = \lambda^2.$$

Also ist $\lambda = \pm 1$.

Ein zweiter Beweis: Die wesentlichen Schritte in den Aufgabenteilen (i) und (ii) lassen sich auch simultan loesen.

Lemma 3 Sei V ein beliebiger endlich-dimensionaler Vektorraum und $G \subset \mathrm{End}(V)$ eine Gruppe mit der folgenden Eigenschaft: Zu jedem $a \in V \setminus \{0\}$ existiere eine nichttriviale Linearform $\varphi_a \colon V \to K$, so dass G den folgenden Endomorphismus enthalte:

$$g_{a,\varphi_a} \colon V \to V, \quad x \mapsto x + \varphi_a(x) a$$

Dann ist $Z(G) = K \cdot \mathrm{Id}_V \cap G$.

Beweis: Ist $f = \lambda \,\mathrm{Id}_V$, so kommutiert f offensichtlich mit allen Elementen in G. Sei also $f \in Z(G)$ beliebig geben. Insbesondere kommutiert f mit allen $g_{a,\varphi_a} \in G$, $a \neq 0$, also gilt für alle $x \in V$

$$\begin{aligned} f(x) + \varphi_a(x) f(a) = f\left(x + \varphi_a(x) a\right) &= f\left(g_{a,\varphi_a}(x)\right) \\ &= g_{a,\varphi_a}\left(f(x)\right) = f(x) + \varphi_a\left(f(x)\right) a \end{aligned}$$

Somit ist für alle $a, x \in V$ mit $a \neq 0$

$$\varphi_a(x) f(a) = \varphi_a\left(f(x)\right) a$$

Da nach Voraussetzung φ_a ungleich Null ist, kann man zu jedem $a \neq 0$ ein $x = x_a$ mit $\varphi_a(x_a) = 1$ wählen. Also gilt für alle $a \neq 0$

$$f(a) = \varphi_a\,(f(x))\,a$$

Insbesondere ist jeder Vektor $a \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von f! Nach Lemma 1 ist f ein skalares Vielfaches der Identität.

Um nun die Aufabe zu lösen muss man nur verifizieren, dass die Gruppe die Eigenschaft hat, die Lemma 3 verlangt:

(i') Wir setzen $V = \mathbb{R}^n$ und $G = \mathrm{O}(n) = \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt bezeichne. Zu jedem $a \in V \setminus \{0\}$ ist die orthogonale Spiegelung $s_a \colon V \to V, x \mapsto x + 2\frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a$ in G enthalten. Definiert man die Linearform $\varphi_a := \frac{2}{\langle a,a\rangle}\langle\cdot, a\rangle$, so sieht man, dass die obige Bedingung an die Gruppe erfüllt ist.

(ii') Sei K ein beliebiger Körper, $V = K^{2m}$ und $G = \mathrm{Sp}(2m, K) = \mathrm{Aut}(K^{2m}, \Phi)$, wobei Φ die symplektische alternierende Form sei. Zu jedem $a \in V \setminus \{0\}$ ist die symplektische Transvektion $t_{a,1} \colon V \to V, x \mapsto x + \Phi(x, a)a$ in G enthalten. Definiert man die Linearform $\varphi_a := \Phi(\cdot, a)$, so sieht man, dass die obige Bedingung an die Gruppe erfüllt ist.