Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Philipp Gross

SS 09

Übungen zur Linearen Algebra II

Musterlösung Blatt 10

Aufgabe 1. Angenommen $QQ' = Q'Q$ für alle $Q' \in \mathbb{H}$. Dann sind die folgenden Gleichungen identisch

$$QI = aI + bI^2 + cJI + dKI = -bE + aI + dJ - cK$$
$$IQ = aI + bI^2 + cIJ + dIK = -bE + aI - dJ + cK,$$

so dass $d = -d$ und $c = -c$ gelten muss, was nur im Fall $c = 0 = d$ möglich ist. Analog folgt aus der Gleichheit der nächsten Gleichungen

$$QJ = aJ + bIJ + cJ^2 + dKJ = -cE - dI + aJ + bK$$
$$JQ = aJ + bJI + cJ^2 + dJK = -cE + dI + aJ - bK,$$

dass $b = 0$ gelten muss.

Aufgabe 2. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit einer alternierenden Bilinearform $\Phi\colon V \times V \to \mathbb{R}$. Nach Definition ist eine symplektische Transvektion ein Endomorphismus

$$t_{a,\rho}\colon V \to V, \quad x \mapsto x + \rho \cdot \Phi(a, x) \cdot a$$

für $a \in V \setminus \{0\}$ und $\rho \in \mathbb{R}$. Nach Vorlesung kann man eine Basis $x_1, \ldots, x_n$ von V wählen, so dass $t_{a,\rho}$ durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \rho & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt wird. Ist $\rho = 0$, so ist A die Identität und daher in Jordan-Normalform. Wir können daher $\rho \neq 0$ annehmen. Beachte, dass A durch die folgenden Gleichungen bestimmt ist:

$$t_{a,\rho}(x_1) = x_1 \quad \text{und} \quad t_{a,\rho}(x_2) = \rho x_1 + x_2 \quad \text{und} \quad t_{a,\rho}(x_i) = x_i \text{ für } i \geq 3$$

Definiert man $y := \rho x_1$, so sind diese Gleichungen zu den folgenden äquivalent:

$$t_{a,\rho}(y) = y \quad \text{und} \quad t_{a,\rho}(x_2) = y + x_2 \quad \text{und} \quad t_{a,\rho}(x_i) = x_i \text{ für } i \geq 3$$

Also ist die darstellende Matrix von $t_{a,\rho}$ in der Basis $x_2, y, x_3, \ldots, x_n$ in Jordan-Normalform

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3. Da das Minimalpolynom μ_f in verschiedene Linearfaktoren zerfällt, ist f diagonalisierbar. Ferner sind a und a' die einzigen Eigenwerte, also spannen deren Eigenräume U bzw. U' den ganzen Vektorraum V auf, d.h. $V \simeq U \oplus U'$. Also gibt es für jeden Vektor $v \in V$ genau zwei Eigenvektoren $u \in U$,$u' \in U'$ mit $v = u + u'$ und es gilt $f(v) = f(u) + f(u') = au + a'u'$.

Angenommen, es gilt $a = -1$, $a' = 1$ und $U \perp U'$ (d.h. für alle $u \in U, u' \in U'$ ist $\langle u, u' \rangle = 0$). Dann ist f eine Isometrie, da für alle $v_i = u_i + u_i'$, $i = 1, 2$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle f(v_1), f(v_2) \rangle &= \langle -u_1 + u_1', -u_2 + u_2' \rangle \\
&= \langle -u_1, -u_2 \rangle + \langle -u_1, u_2' \rangle + \langle u_1', -u_2 \rangle + \langle u_1', u_2' \rangle \\
&= \langle u_1, u_2 \rangle + \langle u_1', u_2' \rangle \\
&= \langle u_1, u_2 \rangle + \langle u_1, u_2' \rangle + \langle u_1', u_2 \rangle + \langle u_1', u_2' \rangle \\
&= \langle v_1, v_2 \rangle
\end{aligned}$$

Ist umgekehrt f eine Isometrie, so gilt für $\lambda \in \{a, a'\}$ und $v \neq 0$ mit $f(v) = \lambda v$

$$0 \neq \langle v, v \rangle = \langle f(v), f(v) \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle$$

Daher gilt $a^2 = 1 = a'^2$. Wegen $a, a' \in \mathbb{R}$ und $a < a'$ ist dies nur für $a = -1$ und $a' = 1$ erfüllt. Ferner ist $U \perp U'$, denn für $u \in U, u' \in U$ gilt

$$0 = \langle f(v), f(v) \rangle - \langle v, v \rangle = \langle u' - u, u' - u \rangle - \langle u' + u, u' + u \rangle = -4 \langle u', u \rangle$$

Aufgabe 4.

(i) Nach Wahl einer Basis induziert jede Matrix $A \in SO(3)$ eine Isometrie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich des Standard-Skalarproduktes Φ auf $\mathbb{R}^3$ mit $\det f = 1$. Nach Vorlesung ist f immer ein Produkt von Spiegelungen $s_1 \circ \cdots \circ s_r$. Ferner wurde in der Vorlesung angemerkt, dass man stehts $r \leq \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ einrichten kann, da Φ ein Skalarprodukt ist. Außerdem wurde bemerkt, dass jede Isometrie mit Determinante gleich 1 nur in eine gerade Anzahl von Spiegelungen zerlegt werden kann. Also gilt $f = s_1 \circ s_2$.

(ii) Sei B das Produkt zweier orthogonaler Spiegelungen $B = S_u \cdot S_v$. Dann gilt für alle $x \in u^\perp \cap v^\perp =: W$

$$Bx = S_u S_v x = S_u x = x$$

Wegen $\dim W = \dim u^\perp \cap v^\perp \geq \dim u^\perp + \dim v^\perp - \dim \mathbb{R}^4 = 3 + 3 - 4 = 2$ ist $W \neq 0$, also ist 1 ein Eigenwert von B.

Definiert man $B := -\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^4}$, so ist $B \in \mathrm{SO}(4)$, hat aber nicht den Eigenwert 1 und kann demnach nicht das Produkt zweier Spiegelungen sein.