Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Philipp Gross

SS 09

Übungen zur Linearen Algebra II

Musterlösung Blatt 9

Aufgabe 1. Die symmetrische Matrix $G = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$ induziert kanonisch eine symmetrische Bilinearform $\Phi_\lambda \colon V \times V \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^t G y$. Nun ist Φ_λ genau dann ein Skalarprodukt, wenn für alle $x \neq 0$

$$\begin{aligned} 0 < \Phi_\lambda(x, x) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda x_1^2 + \lambda x_2^2 - 2x_1 x_2 \\ &= (\lambda - 1)x_1^2 + (\lambda - 1)x_2^2 + (x_1 - x_2)^2 \end{aligned}$$

Die Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn $\lambda > 1$. Denn ist $\lambda > 1$, so ist die obige Ungleichung wahr, da Quadratzahlen ungleich Null in $\mathbb{R}$ positiv sind. Ist umgekehrt $\lambda \leq 1$, so kann die obige Ungleichung nicht für alle $x \neq 0$ gelten (im Fall $x = (1, 1)$ ist $\Phi_\lambda(x, x) = (\lambda - 1)2 < 0$).

Aufgabe 2. Es gelten,

$$\begin{aligned} \tau_A(H_1) &= \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix}}^t = \begin{pmatrix} z\overline{z} - w\overline{w} & 2z\overline{w} \\ 2\overline{z}w & w\overline{w} - z\overline{z} \end{pmatrix} \\ &= (z\overline{z} - w\overline{w})H_1 + (\overline{z}w + \overline{w}z)H_2 + i(\overline{z}w - \overline{w}z)H_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_A(H_2) &= \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix}}^t = \begin{pmatrix} -\overline{zw} - zw & z^2 - \overline{w}^2 \\ \overline{z}^2 - w^2 & zw + \overline{zw} \end{pmatrix} \\ &= -(zw + \overline{zw})H_1 + \frac{1}{2}(z^2 + \overline{z}^2 - w^2 - \overline{w}^2)H_2 + \frac{i}{2}(\overline{z}^2 - z^2 + \overline{w}^2 - w^2)H_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_A(H_3) &= \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix}}^t = \begin{pmatrix} i\overline{zw} - izw & i\overline{w}^2 + iz^2 \\ -i\overline{z}^2 - iw^2 & -i\overline{zw} + izw \end{pmatrix} \\ &= i(\overline{zw} - zw)H_1 + \frac{i}{2}(z^2 - \overline{z}^2 - w^2 + \overline{w}^2)H_2 + \frac{1}{2}(z^2 + \overline{z}^2 + w^2 + \overline{w}^2)H_3, \end{aligned}$$

Also ist

$$B = \begin{pmatrix} z\overline{z} - w\overline{w} & zw + \overline{zw} & i(\overline{zw} - zw) \\ \overline{z}w + \overline{w}z & \frac{1}{2}(z^2 + \overline{z}^2 - w^2 - \overline{w}^2) & \frac{i}{2}(z^2 - \overline{z}^2 - w^2 + \overline{w}^2) \\ i(\overline{z}w - \overline{w}z) & \frac{i}{2}(\overline{z}^2 - z^2 + \overline{w}^2 - w^2) & \frac{1}{2}(z^2 + \overline{z}^2 + w^2 + \overline{w}^2) \end{pmatrix}$$

Da B invariant ist unter komplexer Konjugation, ist $B \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$. Nach Vorlesung ist B sogar in $SO(3)$ enthalten.

Aufgabe 3. Wir führen den Beweis per Induktion über n.

Im Fall $n = 1$ ist $\operatorname{sign} G_1 = \operatorname{sign}\det G_1 = (-1)^{n_{-1}}$. Also ist die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der reelen Zahlenfolge $1, G_1$ gleich 0, falls n_{-1} gerade und gleich 1, falls n_{-1} ungerade ist. Es gilt aber $0 \leq n_{-1} \leq 1$, also folgt die Behauptung.

Sei nun $n \geq 2$ und die Behauptung für jeden $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $< n$ wahr. Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Basis von V wie in der Behauptung. Um Induktion anwenden zu können, müssen wir V als direkte Summe von kleineren Unterräumen zerlegen. Dabei müssen wir diese Zerlegung wie folgt *verträglich* mit Φ wählen.

Definiere den Unterraum W als das Erzeugnis der Vektoren $y_i := x_i$, $1 \leq i \leq n-1$, und die Abbildung $\Psi\colon W \times W \to \mathbb{R}$ durch die Einschränkung $\Psi = \Phi|_{W\times W}$. Dann ist Ψ eine symmetrische Bilinearform und die Vektoren $y_1, \ldots, y_{n-1}$ bilden eine Basis von W mit der Eigenschaft, dass die Matrizen

$$H_k := (\Psi(y_i, y_j))_{1\leq,i,j\leq k} \in \operatorname{Mat}(k, \mathbb{R}), \quad \text{für} \quad 1 \leq k \leq n-1$$

invertierbar sind (es gilt nämlich $H_k = G_k$). Nach Induktionsvorraussetzung gilt also die Behauptung für das Tripel $(W, (y_i)_{i=1}^{n-1}, \Psi)$. Betrachte nun das orthogonale Komplement

$$W^\perp = \{x \in V\colon \Phi(x, y) = 0 \text{ für alle } y \in W\}$$

Da die Einschränkung $\Psi = \Phi|_{W\times W}$ nicht ausgeartet ist, ist nach Vorlesung die kanonische Abbildung

$$W \oplus W^\perp \to V, (x, y) \mapsto x + y$$

ein Isomorphismus; wir haben also V in Unterräume zerlegt mit $\dim W = n-1$ und $\dim W^\perp = 1$ Wir wählen nun eine Basis von V, welche diese Zerlegung respektiert. Genauer gesagt wählen wir irgendeinen Vektor $y_n \in W^\perp \setminus \{0\}$; dieser definert eine Basis von $W^\perp$. Dann ist $y = (y_1, \ldots, y_n)$ eine Basis von V bezüglich der die Gram-Matrix von Φ Blockgestalt hat

$$G' := (\Phi(y_i, y_j)) = \begin{pmatrix} \Psi(y_\alpha, y_\beta)_{1\leq\alpha,\beta\leq n-1} & \\ & \Phi(y_n, y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{n-1} & \\ & \Phi(y_n, y_n) \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt

$$n_{-1}(\Phi) = \begin{cases} n_{-1}(\Psi) & \text{falls } \Phi(y_n, y_n) > 0 \\ n_{-1}(\Psi) + 1 & \text{falls } \Phi(y_n, y_n) < 0 \end{cases}$$

und

$$\operatorname{sign}\det G' = \operatorname{sign}\det G_{n-1} \cdot \operatorname{sign} \Phi(y_n, y_n)$$

Da G und G' zu der gleichen Bilinearform gehören gilt ferner

$$\operatorname{sign}\det G' = \operatorname{sign}\det G$$

Also erhöht sich n_{-1} genau dann um 1, wenn in der Folge $\det G_{n-1}, \det G$ ein Vorzeichenwechsel stattfindet. Nach Induktion ist $n_1(\Psi)$ gerade die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge

$$1, \det G_1, \ldots, \det G_{n-1}$$

ist und es folgt die Behauptung.

Aufgabe 4.

(i) Die folgenden Matrizen bilden eine $\mathbb{R}$-Basis von U

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

Sei $H = x_1H_1 + x_2H_2 + x_3H_3 + x_4H_4$ beliebig gegeben, also

$$H = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 + ix_4 \\ x_3 - ix_4 & x_2 \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\det(H) = x_1x_2 - x_3^2 - x_4^2$$

und nimmt man $H' = \begin{pmatrix} x_1' & x_3' + ix_4' \\ x_3' - ix_4' & x_2' \end{pmatrix} \in U$ hinzu, so ist $\Phi(H, H')$ gleich

$$= \frac{1}{2}\left(x_1x_2 - x_3^2 - x_4^2 + x_1'x_2' - x_3'^2 - x_4'^2 - (x_1 + x_1')(x_2 + x_2') + (x_3 + x_3')^2 + (x_4 + x_4')^2\right)$$
$$= -\frac{1}{2}x_1x_2' - \frac{1}{2}x_2x_1' + x_3x_3' + x_4x_4'$$

Daher ist Φ symmetrisch und bilinear.

(ii) Sind $H_1, \ldots, H_4$ wie oben, so ist die Gram-Matrix

$$G := (\Phi(H_i, H_j)) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) Ersetzt man die Matrizen $H_1, \ldots, H_4$ durch $H_1' := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $H_2' := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $H_3' := H_3$ und $H_4' = H_4$, so ist $H_1', \ldots, H_4'$ auch eine Basis von U und die Gram-Matrix in der neuen Basis lautet

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hieraus liest man direkt $n_1 = 3$, $n_{-1} = 1$ und $n_0 = 0$ ab (oder man benutyt Aufgabe 3).

Bemerkung: Ändert man nicht die Basis ab, so kann man trotzdem n_1, n_{-1}, n_0 bestimmen. Nach dem Trägheitssatz von Sylvester gibt es eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$ mit $G = T^tDT$, wobei $D = \mathrm{diag}(n_1, n_1, n_0)$ eine Diagonalmatrix mit n_1 vielen 1, n_{-1} vielen -1 und n_0 vielen 0 ist. Es gilt

$$-\frac{1}{4} = \det G = \det T^t \det D \det T = (\det T \det T^t) \det D = (\det T)^2(-1)^{n_{-1}}0^{n_0}$$

Also ist $n_0 = 0$ und $n_{-1} \in \{1, 3\}$. Andererseits kann man an der Gestalt von G direkt $n_1 \geq 2$ ablesen, also ist $n_{-1} = n - n_0 - n_1 \leq 4 - 2 \leq 2 < 3$. Folglich ist $n_{-1} = 1$ und somit auch $n_1 = 3$ bestimmt.