Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Philipp Gross SS 09

Übungen zur Linearen Algebra II

Musterlösung Blatt 7

Aufgabe 1. Um eine bessere Übersicht zu erzielen, notieren wir unter + und $\cdot$ jeweils, zu welchem Raum diese Operationen gehören.

(i) *b ist additiv:* Seien $x, y \in V$ beliebig gegeben. Wir müssen zeigen, dass $b(x \underset{V}{+} y)$ und $b(x) \underset{(V^*)^*}{+} b(y)$ als Linearformen $V^* \to K$ identisch sind. Es gilt für alle $f \in V^*$

$$\begin{aligned} b(x \underset{V}{+} y)(f) &= f(x \underset{V}{+} y) && \text{(Def. von } b) \\ &= f(x) \underset{K}{+} f(y) && (f \text{ additiv}) \\ &= b(x)(f) \underset{K}{+} b(y)(f) && \text{(Def. von } b) \\ &= \left(b(x) \underset{(V^*)^*}{+} b(y) \right)(f) && \text{(Def. der Addition in } V^*) \end{aligned}$$

Folglich sind $b(x \underset{V}{+} y)\colon V^* \to K$ und $b(x) \underset{(V^*)^*}{+} b(y)\colon V^* \to K$ identisch.

(ii) *b ist homogen:* Sei $x \in V$ und $\lambda \in K$ beliebig gegeben. Dann gilt für alle $f \in V^*$

$$\begin{aligned} b(\lambda \underset{V}{\cdot} x)(f) &= f(\lambda \underset{V}{\cdot} x) && \text{(Def. von } b) \\ &= \lambda \underset{K}{\cdot} f(x) && (f \text{ homogen}) \\ &= \lambda \underset{K}{\cdot} b(x)(f) && \text{(Def. von } b) \\ &= \left(\lambda \underset{(V^*)^*}{\cdot} b(x) \right)(f) && \text{(Def. der Skalarmult. in } V^*) \end{aligned}$$

Daher stimmen die $b(\lambda \underset{V}{\cdot} x)\colon V^* \to K$ und $\lambda \underset{(V^*)^*}{\cdot} b(x)\colon V^* \to K$ überein.

Aufgabe 2.

(i) Die charakterischen Polynome χ_h und χ_{h^*} stimmen überein, da

$$\chi_h(T) = \det(h - T\,\mathrm{Id}_V) \overset{(\star)}{=} \det\left((h - T\,\mathrm{Id}_V)^*\right) = \det(h^* - T\,\mathrm{Id}_{V^*}) = \chi_{h^*}(T),$$

wobei die Gleichung $(\star)$ auf der folgenden Tatsache beruht:

Lemma 1. *Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus auf einem endlich dimensionalen Vektorraum. Dann gilt*

$$\det(f) = \det(f^*)$$

Beweis: Wähle eine Basis $x_1, \ldots, x_n$ von V. Dies induziert die duale Basis $x_1^*, \ldots, x_n^*$ von V^*. Nach Vorlesung ist $\mathrm{Mat}_x^x(f)^t = \mathrm{Mat}_{x^*}^{x^*}(f^*)$ und für jede quadratische Matrix A gilt $\det A = \det A^t$. Da die Determinante eines Endomorphismus sich gerade als Determinante einer darstellenden Matrix berechnen lässt gilt $\det(f) = \det\left(\mathrm{Mat}_x^x(f)\right)$ und $\det(f^*) = \det\left(\mathrm{Mat}_{x^*}^{x^*}(f^*)\right)$. Zusammen ergibt dies

$$\det(f) = \det\left(\mathrm{Mat}_x^x(f)\right) = \det\left(\mathrm{Mat}_x^x(f)^t\right) = \det\left(\mathrm{Mat}_{x^*}^{x^*}(f^*)\right) = \det(f^*)$$

□

Ferner gilt für jedes Polynom $p = \sum_{i=0}^r a_i T^i \in K[T]$

$$p(h^*) = \sum_{i=0}^r a_i (h^*)^i = \sum_{i=0}^r a_i (h^i)^* = p(h)^*,$$

also ist $p(h^*)$ genau dann der Null-Endomorphismus, wenn $p(h)^*$ der Null-Endomorphismus ist. Letzteres ist genau dann der Fall wenn $p(h)$ der Null-Endomorphismus ist. Daher sind auch μ_h und μ_{h^*} identisch.

(ii) h ist genau dann trigonalisierbar (bzw. diagonalisierbar, bzw. halbeinfach), wenn μ_h in Linearfaktoren zerfällt (bzw. in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt, bzw. separabel ist). Wegen $\mu_h = \mu_{h^*}$ folgt daher die Behauptung.

Aufgabe 3. s ist linear, weil für $a, b \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$s(a+\lambda b) = a + \lambda b - 2\frac{f(a+\lambda b)}{f(y)}y = a - 2\frac{f(a)}{f(y)}y + \lambda b - 2\frac{\lambda f(b)}{f(y)}y = s(a) + \lambda s(b)$$

Nun zum Minimalpolynom. Aus

$$f(s(x)) = f(x) - 2f\left(\frac{f(x)}{f(y)}y\right) = f(x) - 2\frac{f(x)}{f(y)}f(y) = -f(x)$$

folgt

$$s \circ s(x) = s(x) - 2\frac{f(s(x))}{f(y)}y = x - 2\frac{f(x)}{f(y)}y - 2\frac{-f(x)}{f(y)}y = x,$$

also ist $s^2 - \mathrm{Id}_V = 0$. Wegen $\operatorname{char} \mathbb{R} \neq 2$ und $s \neq \pm \mathrm{Id}_V$ ist daher

$$\mu_s = T^2 - 1 = (T+1)(T-1)$$

Insbesondere ist s diagonalisierbar, da das Minimalpolynom in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt. Um die Jordan-Normalform zu bestimmen, reicht es folglich die Dimension der Eigenräume V_1 und V_{-1} auszurechnen. Es gilt $V_1 = \ker f$, denn für $x \in V$ ist genau dann $x \in V_1$, wenn

$$0 = s(x) - x = 2\frac{f(x)}{f(y)}y$$

also genau dann wenn $f(x) = 0$ erfüllt ist. An $f(y) \neq 0$, sehen wir, dass $f \colon V \to K$ surjektiv ist und errechnen schließlich

$$\dim V_1 = \dim \ker f = \dim \operatorname{im} f - \dim V = 1 - n$$

$$\dim V_{-1} = n - \dim V_1 = 1$$

Aufgabe 4. Es reicht zu zeigen, dass die Familie $\varphi = (\varphi_{\lambda,i})_{\lambda \in K, i \in \mathbb{N}}$ von nicht-negativen ganzen Zahlen $\varphi_{\lambda,i} = \operatorname{rank}(f - \lambda \mathrm{Id}_V)^i$, $i \in \mathbb{N}$, $\lambda \in K$ die Jordan-Normalform eines trigonalisierbaren Endomorphismus eindeutig festlegen.

Definiere dafür die Unterräume $V_\lambda^i = \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_V)^i$. Sie sind in eine aufsteigende Kette von Inklusionen angeordnet

$$\{0\} \subset V_\lambda^1 \subset V_\lambda^2 \subset \cdots \subset V_\lambda^i \subset \cdots \subset V$$

Für jedes $\lambda \in K$ wird obige Kette für grosse i stationär, da V endlich-dimensional ist. Es gibt also ein $i_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $u \geq i_0$ stets $V_\lambda^i = V_\lambda^{i+1}$. Der Untervektorraum $V_{(\lambda)} = V_\lambda^{i_0}$ ist der verallgemeinerte Eigenraum zum Eigenwert λ. Nach Vorlesung ist für jedes λ der Unterraum $V_{(\lambda)}$ f-invariant, also auch $f - \lambda \mathrm{Id}$-invariant, und

$$f_\lambda := (f - \lambda \mathrm{Id}_V)|_{V_{(\lambda)}} \colon V_{(\lambda)} \to V_{(\lambda)}$$

ist nilpotent. Ferner ist nach Vorlesung die kanonische Abbildung $\bigoplus_{\lambda \in K} V_{(\lambda)} \to V$ ein Isomorphismus, da f trigonalisierbar ist; d.h. V ist in f-invariante Unterräume

$V_{(\lambda)}$ zerlegt und die Jordan-Normalform von f ist eindeutig durch die Jordan-Normalformen der nilpotenten Endomorphismen $f_\lambda \colon V_{(\lambda)} \to V_{(\lambda)}$ bestimmt. Wir fixieren nun ein beliebiges $\lambda \in K$. Die Dimension

$$n_\lambda := \dim V_{(\lambda)} = \lim_{i\to\infty} \dim V_\lambda^i = \lim_{i\to\infty} (n - \varphi_{\lambda,i})$$

ist eindeutig durch φ festgelegt. Da f_λ nilpotent ist, folgt aus der Theorie für nilpotente Endomorphismen, dass die Anzahl $b_{\lambda,d}$ der Jordan-Blöcke der Größe d in der Jordan-Normalform von f zum Eigenwert λ (welches die Anzahl der Jordan-Blöcke der Größe d in der Jordan-Normalform von f_λ zum Eigenwert 0 ist), der folgenden Rekursionsgleichung genügt:

$$\operatorname{rank}(f_\lambda^i) = b_{\lambda,i+1} + 2b_{\lambda,i+2} + \cdots$$

Die Summe ist endlich, da $b_{\lambda,j} = 0$ für $j \geq n_\lambda$. Hieraus kann man $b_{\lambda,n_\lambda}, b_{\lambda,n_\lambda-1}, \ldots b_{\lambda,2}$ rekursiv ausrechnen und erhält $b_{\lambda,1}$ durch Umformen der Gleichung

$$n_\lambda = b_{\lambda,1} + 2b_{\lambda,2} + \cdots + n_\lambda b_{\lambda,n_\lambda}$$

Es reicht daher zu zeigen, dass die Ränge $\operatorname{rank}(f_\lambda^i)$ durch φ eindeutig bestimmt sind. Hierfür benötigen wir das folgende

Lemma 2. *Der Unterraum $\bigoplus_{\nu\neq\lambda} V_{(\nu)}$ ist $f - \lambda\,\mathrm{Id}$-invariant und die Einschränkung von $f - \lambda\,\mathrm{Id}_V$ auf diesen ist ein Isomorphismus.*

Beweis: Sei $x \in V$ gegeben. Ist $(f - \lambda\,\mathrm{Id})(x) \in V_{(\lambda)}$, d.h. $(f - \lambda\,\mathrm{Id})^i((f - \lambda\,\mathrm{Id})(x)) = 0$ für ein i, so ist $(f - \lambda\,\mathrm{Id})^{i+1}(x) = 0$ und folglich $x \in V_{(\lambda)}$. Folglich ist $\bigoplus_{\nu\neq\lambda} V_{(\nu)}$ ist ein $f - \lambda\,\mathrm{Id}$-invarianter Unterraum. Die Einschränkung von $f - \lambda\,\mathrm{Id}$ auf diesen ist injektiv (und somit bijektiv), denn für $x \in \bigoplus_{\nu\neq\lambda} V_{(\nu)}$ mit $(f - \lambda\,\mathrm{Id})(x) = 0$ gilt $x \in V_\lambda^1 \subset V_{(\lambda)}$, also $x = 0$.

□

Da auch $V_{(\lambda)}$ ein $f - \lambda\,\mathrm{Id}$-invarianter Unterraum ist, folgt hieraus

$$\begin{aligned}
\varphi_{\lambda,i} &= \operatorname{rank}(f - \lambda\,\mathrm{Id})^i \\
&= \operatorname{rank}(f - \lambda\,\mathrm{Id})^i|_{V_\lambda} + \operatorname{rank}(f - \lambda\,\mathrm{Id})^i|_{\bigoplus_{\nu\neq\lambda} V_{(\nu)}} \\
&= \operatorname{rank}(f_\lambda^i) + \dim \bigoplus_{\nu\neq\lambda} V_{(\nu)} \\
&= \operatorname{rank}(f_\lambda^i) + n - n_\lambda
\end{aligned} \tag{1}$$

also ist

$$\operatorname{rank}(f_\lambda^i) = \varphi_{\lambda,i} - n + n_\lambda$$

eindeutig durch φ bestimmt.