Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Philipp Gross

SS 09

Übungen zur Linearen Algebra II

Musterlösung Blatt 5

Aufgabe 1. Das charakteristische Polynom von A ist $\chi_A(T) = T^2(T+1)^2$ und zerfällt daher in Linearfaktoren. Daher ist A triagonalisierbar. Ferner hat A zwei Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -1$, jeweils mit algebraischer Multiplizität $m_i' = 2$. Für die Jordanblöcke $J_{m_{ij}}(\lambda_i) \in \mathrm{Mat}(m_{ij}, \mathbb{Q})$, $j = 1, \ldots, s_i$ zum Eigenwert λ_i gilt $\sum_j^{s_i} m_{ij} = m_i'$. In unserem Fall gibt es also höchstens zwei Kombinationen:

(i) $s_i = 2$ mit $m_{i1} = 1$ und $m_{i2} = 1$,

(ii) $s_i = 1$ mit $m_{i1} = 2$.

Die erste Möglichkeit tritt genau dann auf, wenn die geometrische Multiplizität m_i mit der algebraischen m_i' übereinstimmt.

Wir rechnen für $\lambda_1 = 0$ nach, dass

$$m_1 = \dim\ker(A - \lambda_1 \,\mathrm{Id}) = \dim\ker A = 4 - \mathrm{rk}(A) = 1 < m_1'.$$

gilt. Also liegt Fall (ii) vor. Für $\lambda_2 = -1$ ist

$$m_2 = \dim\ker(A - \lambda_2 \,\mathrm{Id}) = \dim\ker(A + Id) = \dim \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 2,$$

so dass hier Fall (i) vorliegt. Die Jordan-Normalform lautet schließlich

$$J = \begin{pmatrix} J_2(\lambda_1) & & \\ & J_1(\lambda_2) & \\ & & J_1(\lambda_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$ eine nichttriagonalisierbare Matrix, d.h. das charakteristische Polynom $\chi_A(T) \in \mathbb{R}[T]$ zerfällt nicht vollständig in Linearfaktoren. Andererseits zerfällt das charakteristische Polynom über dem Körper $\mathbb{C}$, welcher algebraisch abgeschlossen ist und $\mathbb{R}$ enthält. Es reicht zu zeigen, dass die Eigenwerte paarweise verschieden sind, um zu beweisen, dass A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist.

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von A (ohne Vielfachheit gezählt). Da χ_A ungeraden Grad besitzt, existiert mindestens eine reele Nullstelle; o.E. sei daher $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ angenommen. Ferner ist χ_A invariant unter komplexer Konjugation, da es über $\mathbb{R}$ definiert ist. Es folgt

$$(T - \lambda_1)(T - \lambda_2)(T - \lambda_3) = \chi_A(T) = \overline{\chi_A(T)} = (T - \overline{\lambda}_1)(T - \overline{\lambda}_2)(T - \lambda_3).$$

Daher bildet komplexe Konjugation eine Permutation σ von $\{, \lambda_1, \lambda_2\}$. Allerdings ist $\sigma = \mathrm{Id}$ ausgeschlossen, da sonst alle Eigenwerte reell wären und folglich χ_A bereits über $\mathbb{R}$ zerfallen würde. Dies impliziert $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $\overline{\lambda}_1 = \lambda_2$, also sind alle Eigenwerte paarweise verschieden.

Aufgabe 3. Für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{F}_p)$ können höchstens drei verschiedene Jordan-Normalformen auftreten:

(i) $J = \big(J_3(\lambda)\big) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{F}_p$.

(ii) $J = \begin{pmatrix} J_2(\lambda) & \\ & J_1(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_p$.

(iii) $J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda) & & \\ & J_1(\mu) & \\ & & J_1(\nu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{F}_p$.

Wir zählen im ersten Fall $N_1 = p$ und im zweiten Fall $N_2 = p^2$ Möglichkeiten. Im dritten Fall ist zu beachten, dass die Permutationen nicht mehrfach gezählt werden. Wir erhalten $N_3 = \binom{p+3-1}{3} = \frac{p^3+3p^2+2p}{6}$ (ungeordnetes Ziehen von 3 Kugeln aus einer Urne mit p Kugeln und Zurücklegen).

Die Gesamtanzahl lautet somit

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = \frac{p^3 + 9p^2 + 8p}{6}.$$

Aufgabe 4. Im Spezialfall $A = J_n(\lambda)$ lautet die Zerlegung

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ & & \ddots & & & \\ 0 & 1 & & & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda & 0 \\ & & \ddots & & & \\ 1 & \lambda & 0 & & \dots & 0 \\ \lambda & 0 & & & \dots & 0 \end{pmatrix} =: F_n \cdot I_n(\lambda)$$

Daraus erhält man die Zerlegung einer Jordan-Normalform

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & & 0 & J_{n_s}(\lambda_s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n_1} \cdot I_{n_1}(\lambda_1) & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & F_{n_2} \cdot I_{n_2}(\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & & 0 & F_{n_s} \cdot J_{n_s}(\lambda_s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n_1} & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & F_{n_2} & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & & 0 & F_{n_s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{n_1}(\lambda_1) & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & I_{n_2}(\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & & 0 & I_{n_s}(\lambda_s) \end{pmatrix} \\ &= F \cdot I(\lambda) \end{aligned}$$

Letztlich kann jede triagonalisierbare Matrix A in eine Jordan-Normalform transformiert werden, d.h. es existiert eine invertierbare Matrix T und eine Jordan-Matrix J mit $A = TJT^{-1}$. Dies liefert die Zerlegung

$$A = TFI(\lambda)T^{-1} = TFT^t \cdot (T^t)^{-1} I(\lambda) T^{-1}$$

mit symmetrischen Faktoren, wegen

$$\left(TFT^t\right)^t = \left(T^t\right)^t F^t T^t = TFT^t$$

und

$$\left((T^t)^{-1} I(\lambda) T^{-1}\right)^t = \left(T^{-1}\right)^t I(\lambda)^t ((T^t)^{-1})^t = (T^t)^{-1} I(\lambda) T^{-1}$$