Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Philipp Gross

SS 09

Übungen zur Linearen Algebra II

Musterlösung Blatt 2

Aufgabe 1. Die Abbildung $[A] \mapsto \operatorname{tr}(A)$ ist nicht wohldefiniert. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und $\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 1 = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (für beliebige Charakteristik $\operatorname{char} K$).

Die Abbildung $[A] \mapsto \operatorname{rk}(A)$ ist wohldefiniert. Der Rang einer linearen Abbildung $K^n \to K^m$ ist invariant unter beidseitiger Komposition von invertierbaren Matrizen nach LA 1 (siehe auch Musterlösung zu Blatt 1, Aufgabe 3.(ii)).

Aufgabe 2. Es gelten $\dim_{\mathbb{R}}(H) = n^2$ und $\dim_{\mathbb{R}}(D) = 2n$. Ferner ist

$$H \cap D = \{A = (a_{ij}) \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{C}) \colon a_{ij} = 0 \text{ für alle } i \neq j \text{ und } a_{ii} \in \mathbb{R}\},$$

folglich $\dim_{\mathbb{R}}(H \cap D) = n$.

Die $\mathbb{R}$-lineare Projektion $\pi \colon H \oplus D \to H + D$, $(A, B) \mapsto A + B$ ist surjektiv und $\ker(\pi) = H \cap D$. Also ist

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}}(H + D) &= \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{im}(\pi) = \dim_{\mathbb{R}}(H \oplus D) - \dim_{\mathbb{R}}(\ker(\pi)) \\ &= \dim_{\mathbb{R}}(H \oplus D) - \dim_{\mathbb{R}}(H \cap D) \\ &= n^2 + 2n - n = n^2 + n. \end{aligned}$$

Letzlich ist D (bzw. H) auch $\mathbb{R}$-Unterraum von $H + D$, also folgt

$$\dim_{\mathbb{R}}(H + D/D) = \dim_{\mathbb{R}}(H + D) - \dim_{\mathbb{R}} D = n^2 + n - 2n = n(n-1)$$

und

$$\dim_{\mathbb{R}}(H + D/H) = \dim_{\mathbb{R}}(H + D) - \dim_{\mathbb{R}} H = n^2 + n - n^2 = n.$$

Aufgabe 3. Gegeben sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Sei $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Basis von U mit $x_\alpha \in V$. Nach dem Basisergänzungssatz existieren Vektoren $x_\beta \in V$, $\beta \in B$, so dass die Familie $(x_\gamma)_{\gamma\in C}$, wobei $C = A \cup B$, eine Basis von V bildet. Insbesondere kann jeder Vektor $v \in V$ auf eindeutige Weise als Linearkombination $v = \sum_{\gamma\in C} v_\gamma x_\gamma$ dargestellt werden, wobei fast alle $v_\gamma \in K$ ungleich Null sind, und ein Vektor $v \in V$ liegt in U genau dann, wenn $v_\gamma = 0$ für alle $\gamma \in C \setminus A = B$ ist.

Für jedes $\gamma \in C$ definieren wir die lineare Abbildung $p_\gamma \colon V \to K$ durch $v \mapsto v_\gamma$. Sie ist wohldefiniert, da $(x_\gamma)_{\gamma\in C}$ eine Basis ist, und surjektiv, da $p_\gamma(x_\gamma) = 1$ gilt. Ihr Kern $H_\gamma := \ker(p_\gamma)$ ist ein Untervektorraum von V und es gilt $V/H_\gamma \simeq K$ via $v + H_\gamma \mapsto p_\gamma(v)$. Folglich ist H_γ eine Hyperebene und es gilt $U = \bigcap_{\gamma\in B} H_\gamma$.

Aufgabe 4. Definiere die Abbildung

$$g \colon P \to P, \quad g((\lambda_i)_{i=0\ldots\infty})_j := \lambda_{2j}.$$

Betrachte die Komposition von $g \colon P \to P$ mit der Quotientenabbildung $\pi \colon P \to P/S$. Sie ist durch $\lambda \mapsto [g(\lambda)] = g(\lambda) + S$ definiert. Da $g(S) \subset S$ erfüllt ist, setzt sich diese Abbildung auf P/V fort, d.h. $f \colon [\lambda] \mapsto [g(\lambda)]$ definiert eine wohldefiniert Abbildung $f \colon V \to V$.

f ist surjektiv: Ist $[\mu] \in V$ eine beliebige Äquivalenzklasse mit $\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots) \in P$, so ist die Klasse $[\lambda]$ mit $\lambda = (\mu_0, 0, \mu_1, 0, \ldots)$ ein Urbild von $[\mu]$.

f ist nicht injektiv: Einerseits wird die Klasse von $\lambda := (0, 1, 0, 1, \ldots) \in P$ durch f auf $[(0, \ldots)]$ abgebildet wird, aber andererseits gilt $[\lambda] \neq 0_V$, da λ nicht in S enthalten ist.

Hieraus folgern wir, dass V nicht endlich-dimensional ist. Denn andernfalls wäre $\dim\ker f = \dim V - \dim\operatorname{im} f = 0$.