

## Übungen zur Linearen Algebra II

### Musterlösung Blatt 1

**Aufgabe 1.** Es gilt  $\dim V = n^2$  und  $\dim U = n$  und nach Vorlesung  $\dim V/U = \dim V - \dim U$ , also  $\dim V/U = n^2 - n$ .

**Aufgabe 2.**

(i) Reflexivität: Für alle  $x \in G$  gilt  $x = exe^{-1}$ .

Symmetrie: Ist  $x' = gxg^{-1}$ , dann gilt  $x = g^{-1}gxg^{-1}g = g^{-1}x'g = g^{-1}x'(g^{-1})^{-1}$ .

Transitivität: Aus  $x' = gxg^{-1}$  und  $x'' = hx'h^{-1}$  folgt  $x'' = ghxh^{-1}g^{-1} = (gh)x(gh)^{-1}$ .

(ii) Da  $K$  algebraisch abgeschlossen ist, zerfällt das charakteristische Polynom  $p_A \in K[t]$ . Nach LA 1, ist  $A$  daher triagonalisierbar, d.h. es gibt eine invertierbare Matrix  $S \in \text{GL}(n, K)$  und eine obere Dreiecksmatrix  $B \in \text{Mat}(n, K)$ , so dass  $A = SBS^{-1}$  gilt.

**Aufgabe 3.**

(i) Beachten Sie, dass die Teilmenge  $\text{Aut}_K(V) \subset \text{Hom}_K(V, V)$  (bzw. auch  $\text{Aut}_K(W) \subset \text{Hom}_K(W, W)$ ) eine Gruppe ist. Insbesondere ist sie abgeschlossen bezüglich Multiplikation und es jedes Element besitzt ein Inverses.

Reflexivität: Für alle  $f \in H$  gilt  $f = \text{Id}_W f \text{Id}_V^{-1}$ .

Symmetrie: Ist  $f' = hfg^{-1}$ , dann gilt  $f = h^{-1}hfg^{-1}g = h^{-1}f'g = h^{-1}f'(g^{-1})^{-1}$ .

Transitivität: Aus  $f' = hfg^{-1}$  und  $f'' = uf'v^{-1}$  folgt  $f'' = uhfg^{-1}v^{-1} = (uh)f(vg)^{-1}$ .

- (ii) Der Rang einer Abbildung ist auf seiner Ähnlichkeitsklasse eindeutig bestimmt und kann alle Werte zwischen 0 und  $m$  annehmen. Das führen wir im folgenden genauer aus.

Da Automorphismen  $g \in \text{Aut}_K(V)$ ,  $h \in \text{Aut}_K(W)$  linear und bijektiv sind, bilden sie Basen auf Basen ab. Es gilt daher  $\text{rk}(f) = \text{rk}(hfg^{-1})$  für alle  $f \in H$ . Also ist  $\overline{\text{rk}}: H/\sim \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,  $[f] \mapsto \text{rk}(f)$  wohldefiniert.

Nach LA 1 lassen sich für eine Abbildung  $f \in H$  jeweils Basen  $y_1, \dots, y_k$  in  $V$  und  $z_1, \dots, z_l$  in  $W$  finden, so dass

$$(\text{Mat}_z^y(f))_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{wenn } (i, j) = (k, k), k = 1, \dots, \text{rk}(f) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Haben zwei Abbildungen  $f, f' \in H$  den gleichen Rang, so gibt es also Basen  $y'_1, \dots, y'_k \in V$  und  $z'_1, \dots, z'_l \in W$  mit  $\text{Mat}_z^y(f) = \text{Mat}_{z'}^{y'}(f')$ . Definiere  $g \in \text{Aut}(V)$  durch  $g(y'_i) = y_i$  und  $h \in \text{Aut}(W)$  durch  $h(z'_j) = z_j$ . Dann gilt  $\text{Mat}_z^y(hf'g^{-1}) = \text{Mat}_{z'}^{y'}(f')$ , also ist  $hf'g^{-1} = f$ . Folglich ist  $\overline{\text{rk}}(f)$  injektiv und das Bild ist genau  $\{0, \dots, m\}$ , da man  $f \in H$  durch  $\text{Mat}_z^y(f)$  wie oben definieren kann.

**Aufgabe 4.** Da  $f = T^2 + 1$  irreduzibel ist  $L$  nach Vorlesung ein Körper. Sei  $x \in L \setminus \{0\}$  beliebig gegeben. Wähle einen Repräsentanten  $g = \lambda + \mu T \in \mathbb{F}_3[T]$  von  $x$ . Da  $\deg(g) < \deg(f)$  gibt es  $a, b \in \mathbb{F}_3[T]$  mit  $ag + bf = 1$ . Dann ist  $1_L = [ag + bf] = [a][g]$ , also ist  $[a]$  das Inverse von  $[g] = x$ . Konkret berechnet man:

- (i) Wenn  $x = [\lambda]$  mit  $\lambda \in \mathbb{F}_3 \setminus \{0\}$  ist  $x^{-1} = [\lambda^{-1}]$ , also  $[1]^{-1} = [1]$  und  $[2]^{-1} = [2]$ .
- (ii) Für  $x = [\mu T]$  mit  $\mu \neq 0$  gilt  $x^{-1} = [\mu^{-1}T^{-1}] = [-\mu^{-1}T]$ , da  $[T]^2 + 1 = 0$ , also  $[T]^{-1} = [2T]$  und folglich  $[2T]^{-1} = [T]$ .
- (iii) Sei  $x = [T + 1]$ . Dann ist  $T^2 + 1 = (T - 1)(T + 1) + 2$ . Also  $[T + 1]^{-1} = [-2^{-1}(T - 1)] = [T + 2]$ . Folglich gilt auch  $[T + 2]^{-1} = [T + 1]$ .
- (iv) Ist  $x = [2T + 1]$ , so folgt  $[2T + 1]^{-1} = 2^{-1}[T + 2]^{-1} = [2(T + 1)] = [2T + 2]$  und schliesslich  $[2T + 2]^{-1} = [2T + 1]$ .

Also haben wir alle  $3^2 - 1 = 8$  Inverse bestimmt.