Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 1

Aufgabe 1. Wie lautet die Definition der Diskriminante für quadratische Polynome?

Aufgabe 2. Sei $X^2 + bX + c$ ein quadratisches Polynom, dessen Diskriminante Δ ein Quadrat ist, und seien

$$\lambda = (\sqrt{b^2 - 4c} - b)/2 \quad \text{und} \quad \lambda' = (-\sqrt{b^2 - 4c} - b)/2$$

seine Wurzeln. Rechnen Sie nach, daß $\Delta = (\lambda - \lambda')^2$ gilt.

Aufgabe 3. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, und $A, B \subset Y$ zwei Teilmengen. Verifizieren Sie die Gleichheiten

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \quad \text{und} \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

von Teilmengen in X.

Aufgabe 4. Sei $\star : M \times M \to M$, $(a, b) \mapsto a \star b$ eine Verknüpfung auf einer Menge M. Angenommen, es gibt ein neutrales Element $e \in M$, und es gilt

$$(a \star c) \star (b \star d) = (a \star b) \star (c \star d)$$

für alle $a, b, c, d \in M$. Zeigen Sie, daß M dann ein kommutativer Monoid ist. Mit anderen Worten, es gilt das Kommutativ- und Assoziativgesetz.

Abgabe: Bis Montag der 27.10. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Das griechische Alphabet

Buchstabe		Name	Transliteration
α	A	Alpha	a
β	B	Beta	b
γ	Γ	Gamma	g
δ, ∂	Δ	Delta	d
ϵ	E	Epsilon	e
ζ	Z	Zeta	z
η	H	Eta	ē
θ, ϑ	Θ	Theta	t
ι	I	Iota	i
κ	K	Kappa	k
λ	Λ	Lambda	l
μ	M	Mu	m
ν	N	Nu	n
ξ	Ξ	Xi	x
o	O	Omikron	o
π	Π	Pi	p
ρ	P	Rho	r
σ	Σ	Sigma	s
τ	T	Tau	t
υ	Υ	Upsilon	u
ϕ, φ	Φ	Phi	ph
χ	X	Chi	kh
ψ	Ψ	Psi	ps
ω	Ω	Omega	ō

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 2

Aufgabe 1. Formulieren Sie eine Definition von Ringen, in der die Begriffe Gruppe und Monoid nicht vorkommen.

Aufgabe 2. Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Verifizieren Sie die folgenden Gleichungen von komplexe Zahlen:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}, \qquad \overline{z} = z - 2i\operatorname{Im}(z),$$
$$\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z), \qquad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \qquad |zw| = |z| \cdot |w|.$$

Aufgabe 3. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in cartesischen Koordinaten $x + iy$ sowie in Polarkoordinaten $re^{i\varphi}$ dar:

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i), \qquad z_2 = e^{\pi i} + 1, \qquad z_3 = \frac{1 + i}{1 - i}, \qquad z_4 = 1 - i + i^2.$$

Aufgabe 4. Skizzieren Sie die folgenden sechs komplexen Zahlen

$$\zeta_0 = 1, \quad \zeta_1 = e^{2\pi i/6}, \quad \zeta_2 = e^{2\pi i 2/6}, \quad \zeta_3 = e^{2\pi i 3/6}, \quad \zeta_4 = e^{2\pi i 4/6}, \quad \zeta_5 = e^{2\pi i 5/6}$$

in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß das genau die komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^6 = 1$ sind, und bestimmen Sie für jedes ζ_n die kleinste natürliche Zahl $\nu_n \geq 1$ mit der Eigenschaft $\zeta_n^{\nu_n} = 1$.

Abgabe: Bis Montag der 3.11. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.
Bitte tackern Sie Ihre Lösungsblätter zusammen.

Termine für die schriftlichen Prüfungen:

Klausur:
Montag, 9.2. von 9:00-11:00 Uhr in den Hörsälen 5C und 5D
Klausureinsicht:
Freitag, 13.2. von 14:00-15:00 Uhr im Seminarraum 25.13.U1.22

Nachklausur:
Montag, 23.3. von 9:00-11:00 Uhr in den Hörsälen 5C und 5D
Nachklausureinsicht:
Freitag, 27.3. von 14:00-15:00 Uhr im Seminarraum 25.13.U1.22

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 3

Aufgabe 1. Wie lauten die Definitionen von Erzeugendensystem, linear unabhängig, sowie Basis?

Aufgabe 2. In dieser Aufgabe betrachten wir den Körper $K = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

(i) Geben Sie zu jedem $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$ das Inverse λ^{-1} an.

(ii) Zählen Sie die Elemente aus K auf, die Quadrate sind.

(iii) Welche der 11 quadratischen Polynome der Form

$$X^2 + \mu X + \mu + 1, \quad \mu \in K$$

besitzen eine Wurzel in K?

Aufgabe 3. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, und $x, y \in V$ zwei Vektoren. Beweisen Sie, daß $x, y \in V$ linear abhängig sind genau dann, wenn entweder $x \in \langle y \rangle$ oder $y \in \langle x \rangle$ gilt.

Aufgabe 4. Sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen. In Analogie zu den komplexen Zahlen machen wir die vierelementige Menge $R = \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ zu einem Ring mit Addition

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

und Multiplikation

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b).$$

(i) Ist der Ring R ein Körper?

(ii) Erhält man einen Körper, wenn man $\mathbb{F}_2$ durch $\mathbb{F}_3$ ersetzt?

(In dieser Aufgabe dürfen Sie getrost verwenden, daß die Verknüpfungen tatsächlich einen Ring liefern.)

Abgabe: Bis Montag der 10.11. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 4

Aufgabe 1. Für welche Parameter $t \in \mathbb{R}$ sind die beiden Vektoren

$$(1,1), (t, t^2) \in \mathbb{R}^2$$

linear abhängig?

Aufgabe 2. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die Vektoren

$$\sin, \cos \in V$$

linear unabhängig sind.

Tip: Betrachten Sie die Nullstellen von cos und sin.

Aufgabe 3. Wir bezeichnen einen Untervektorraum $U \subset V$ als *echten* Untervektorraum falls $U \neq V$.

(i) Kann ein Vektorraum die Vereinigungsmenge von zwei echten Untervektorräumen sein?

(ii) Gibt es einen Vektorraum, der die Vereinigungsmenge von drei echten Untervektorräumen ist?

Aufgabe 4. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Indem wir die Skalarmultiplikation $\mathbb{C} \times V \to V$ auf $\mathbb{R} \times V$ einschränkt, wird die kommutative Gruppe V zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum. Sei nun $x_1, \ldots, x_n \in V$ eine Basis von V als $\mathbb{C}$-Vektorraum, und $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit Imaginärteil $\mathrm{Im}(\xi_i) \neq 0$. Beweisen Sie, daß die Vektoren

$$x_1, \ldots, x_n, \xi_1 x_1, \ldots, \xi_n x_n \in V$$

eine Basis von V als $\mathbb{R}$-Vektorraum bilden.

Tip: Betrachten Sie zunächst den Spezialfall $V = \mathbb{C}$.

Abgabe: Bis Montag der 17.11. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 5

Aufgabe 1. Wie lautet die Definition von linearen Abbildungen?

Aufgabe 2. Sei K ein Körper, und $V \subset K[X]$ der Untervektorraum aller Polynome f vom Grad $\deg(f) \leqslant 3$.

(i) Bestimmen Sie die Dimension von V.

(ii) Zeigen Sie, daß die vier Polynome

$$f_1 = X^3 - 3X^2 + 2, \quad f_2 = (X-1)^3, \quad f_3 = X, \quad f_4 = X + 1$$

linear abhängig sind.

(iii) Finden Sie ein $1 \leqslant i \leqslant 4$ so, daß das nach Weglassen von f_i die drei übrigen Polynome $f_1, \ldots, \widehat{f_i}, \ldots, f_4 \in V$ linear unabhängig geworden sind.

(iii) Ergänzen Sie die drei Polynome $f_1, \ldots, \widehat{f_i}, \ldots, f_4 \in V$ zu einer Basis.

Aufgabe 3. Finden Sie eine Primzahl $p > 0$, für welche die beiden Vektoren

$$([7], [30]), ([121], [14]) \in \mathbb{F}_p^2$$

ein Erzeugendensystem bilden; finden Sie eine weitere Primzahl $p > 0$, für welche dies nicht gilt.

Aufgabe 4. Sei W ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) W ist endlich-dimensional.

(ii) Für jede absteigende Folge von Untervektorräumen in W

$$V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots$$

gibt es ein $j \geq 0$ mit $V_j = V_{j+1} = V_{j+2} = \dots$.

(iii) Für jede aufsteigende Folge von Untervektorräumen in W

$$U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots$$

gibt es ein $i \geq 0$ mit $U_i = U_{i+1} = U_{i+2} = \dots$.

Abgabe: Bis Montag der 24.11. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Raumänderung: Ab Mittwoch, den 19.11. findet die Vorlesung mittwochs im Hörsaal 5F statt! Montags bleiben wir wie gehabt im Hörsaal 5D.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 6

Aufgabe 1. Berechnen Sie die folgenden fünf Matrizenprodukte:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -x \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & -x \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ x \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ x \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Sei V ein K-Vektorraum und $U_1, U_2 \subset V$ zwei Untervektorräume. Ihre Dimensionen seien $n = \dim(V)$ und $n_i = \dim(U_i)$.

(i) Angenommen, $n_1, n_2 > n/2$. Beweisen Sie, daß $U_1 \cap U_2 \subset V$ nicht der Nullvektorraum ist.

(ii) Sei nun $n_1, n_2 < n/2$. Zeigen Sie, daß $U_1 + U_2 \subset V$ nicht der gesamte Vektorraum V ist.

Aufgabe 3. Die *formale Ableitung* eines Polynoms $P(X) = \sum_{n \geq 0} \lambda_n X^n$ ist definiert als $P'(X) = \sum_{n \geq 1} n\lambda_n X^{n-1}$. Sei nun $V_n \subset K[X]$ der Untervektorraum aller Polynome vom Grad $\leqslant n$ über einem Körper K. Wir betrachten die Abbildung

$$f : V_3 \longrightarrow V_4, \quad P(X) \longmapsto -P'(X^2 - 1).$$

(i) Verifizieren Sie, daß die Abbildung f linear ist.

(ii) Wählen Sie Basen von V_3 und V_4, und bestimmen Sie die Matrix von f bezüglich dieser Basen.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper, $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, und $A = (\lambda_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen $\lambda_{ij} \in K$. Angenommen, es gilt $\lambda_{ij} = 0$ wenn $j \geq i$. Beweisen Sie, daß das n-fache Matrixprodukt

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ Faktoren}}$$

die Nullmatrix ist.

Abgabe: Bis Montag der 1.12. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 7

Aufgabe 1. Bestimmen Sie den Rang und sowie eine Basis für den Kern der 3×4-Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & 24 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 0 & 10 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{Q}).$$

Aufgabe 2. Seien V, W zwei K-Vektorräume, $f : V \to W$ eine Abbildung, und $\Gamma_f \subset V \times W$ sein Graph. Beweisen Sie, daß die Abbildung $f : V \to W$ linear ist genau dann, wenn die Teilmenge $\Gamma_f \subset V \times W$ ein Untervektorraum ist.

Aufgabe 3. Unter einer *Fibonacci-Folge* verstehen wir eine Folge von reellen Zahlen a_n, $n \geq 0$ mit der Eigenschaft $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für alle $n \geq 2$. Sei

$$F \subset \prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{R}$$

die Teilmenge aller Fibonacci-Folgen. Zeigen Sie, daß diese Teilmenge ein Untervektorraum, und bestimmen Sie dessen Dimension.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper, und $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ eine $n \times n$-Matrix. Beweisen Sie, daß es ein $m \leqslant n^2$ und Skalare $\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1} \in K$ gibt so, daß

$$A^m + \lambda_{m-1} A^{m-1} + \ldots + \lambda_1 A + \lambda_0 E$$

die Nullmatrix ist. Hierbei ist A^m das m-fache Matrizenprodukt und E die Einheitsmatrix.

Abgabe: Bis Montag der 8.12. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 8

Aufgabe 1. Bestimmen Sie, ob die Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{Q})$$

invertierbar ist, und berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix.

Aufgabe 2. Sei $V \subset K[X]$ der Untervektorraum aller Polynome vom Grad $\leqslant 4$. Wir betrachten die Abbildung

$$f : V \longrightarrow K^2, \quad P(X) \longmapsto (P(1), P'(0)).$$

Verifizieren Sie, daß f linear ist, beschreiben Sie diese Abbildung durch eine Matrix, bestimmen Sie ihren Rang, und berechnen Sie eine Basis ihres Kerns.

Aufgabe 3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{Q})$$

eine 2×2-Matrix mit *ganzzahligen* Einträgen $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Für jede Primzahl $p > 0$ sei

$$A_p = \begin{pmatrix} [a] & [b] \\ [c] & [d] \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{F}_p)$$

die Matrix, die entsteht, wenn man die Einträge von A modulo p nimmt. Wir nehmen nun an, daß $A \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{Q})$ invertierbar ist. Beweisen Sie, daß dann die $A_p \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{F}_p)$ für fast alle Primzahlen $p > 0$ invertierbar sind.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper, und $n \geq 0$. Man sagt, daß zwei $n \times n$-Matrizen A, B miteinander *kommutieren*, wenn $AB = BA$ gilt.

(i) Geben Sie 2×2-Matrizen A, B an, die miteinander kommutieren.

(ii) Geben Sie 2×2-Matrizen A, B an, die nicht miteinander kommutieren.

(iii) Sei nun $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$. Beweisen Sie, daß A mit *allen* Matrizen $B \in \mathrm{Mat}(n, K)$ kommutiert genau dann, wenn $A = \lambda E$ für ein Skalar $\lambda \in K$.

Abgabe: Bis Montag der 15.12. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 9

Aufgabe 1. Rechnen Sie explizit nach, daß die Abbildung

$$\det : \mathrm{GL}(2,K) \longrightarrow K^\times, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto ad - bc$$

ein Homomorphismus von Gruppen ist.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und $V = \mathrm{Mat}(2,K)$ der K-Vektorraum aller 2×2-Matrizen. Wir fixieren eine 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

und betrachten den durch die sogenannte *Lie-Klammer* $[A,B] = AB - BA$ gegebenen Endomorphismus

$$f : V \longrightarrow V, \quad B \longmapsto [A,B].$$

Wählen Sie eine Basis von V und bestimmen Sie die Matrix $M \in \mathrm{Mat}(4,K)$ von f bezüglich dieser Basis.

Aufgabe 3. Sei $n \geq 0$. Berechnen Sie das Signum der Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix} \in S_n.$$

Tip: Multiplizieren Sie mit einer geeigneten Transposition und verwenden Sie vollständige Induktion.

Aufgabe 4. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Wir erhalten zwei Teilmengen

$$U' = \bigcup_{i=0}^{\infty} \operatorname{kern}(f^i) \quad \text{und} \quad U'' = \bigcap_{i=0}^{\infty} \operatorname{im}(f^i).$$

(i) Verifizieren Sie, daß diese Teilmengen Untervektorräume sind.

(ii) Beweisen Sie, daß $U' \cap U'' = 0$ und $U' + U'' = V$ gilt.

Aufgabe 1*. Berechnen Sie die Determinante zu den komplexen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} t+1 & i \\ t & t+i \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} t & 0 & 2i-2 \\ -1 & t & i-2 \\ 0 & -1 & t+i+1 \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie, für welche Paramter $t \in \mathbb{C}$ diese Matrizen nicht invertierbar sind.

Aufgabe 2*. Sind die komplexen Matrizen

$$\begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$$

zueinander konjugiert?

Aufgabe 3*. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und $n \geq 0$. Beweisen Sie, daß der Vektorraum $\operatorname{Mult}_n(V, K)$ aller multilineare Abbildungen

$$\Delta : \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{n \text{ Faktoren}} \longrightarrow K$$

endlich-dimensional ist.

Aufgabe 4*. Sei A eine invertierbare 2×2-Matrix über einem Körper K. Beweisen Sie, dass von den folgenden beiden Aussagen genau eine zutrifft:

1. Es gibt obere Dreiecksmatrizen $X, Y \in \mathrm{GL}(2, K)$ mit $A = XY$.
2. Es gibt obere Dreiecksmatrizen $U, V \in \mathrm{GL}(2, K)$ mit $A = U \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} V$.

Abgabe: Bis Montag der 5.1. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Frohe Weihnachten und guten Rutsch!

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{Q}).$$

(i) Zeigen Sie, daß A invertierbar ist.

(ii) Berechnen Sie die inverse Matrix mit der Cramerschen Regel.

(iii) Berechnen Sie die inverse Matrix mit dem Gauß-Algorithmus.

Aufgabe 2. Sei $A = (\lambda_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{Q})$ eine invertierbare Matrix, deren Einträge λ_{ij} ganze Zahlen sind. Sei $B = (\mu_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q})$ die zu A inverse Matrix. Beweisen Sie, daß die Einträge μ_{ij} genau dann ganze Zahlen sind, wenn $\det(A) = \pm 1$ gilt.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper, $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ eine Matrix, und

$$C = ((-1)^{i+j} \det(A^{ij})) \in \mathrm{Mat}(n, K)$$

ihre Kofaktormatrix. Zeigen Sie, daß $\det(C) = \det(A)^{n-1}$ gilt.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper, $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, und $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, t \in K$ Skalare. Wir definieren eine $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} t & & & & & \alpha_0 \\ -1 & t & & & & \alpha_1 \\ & -1 & t & & & \alpha_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & -1 & t & \alpha_{n-2} \\ & & & & -1 & t + \alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie durch Laplace-Entwicklung und Induktion nach n, daß

$$\det(A) = t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0.$$

Abgabe: Bis Montag der 12.1. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 11

Aufgabe 1. Drücken Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(T)$ der 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

durch die Matrixeinträge $a, b, \ldots, k \in K$ aus.

Aufgabe 2. Finden Sie für die Körper $K = \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_7, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ heraus, ob die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, K)$$

diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3. Sei $P(T) = T^m + \beta_{m-1}T^{m-1} + \ldots + \beta_0 \in K[T]$ ein Polynom, und $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit der Eigenschaft, daß der Endomorphismus

$$P(f) = f^m + \beta_{m-1}f^{m-1} + \ldots + \beta_1 f + \beta_0 \,\mathrm{id}_V$$

die Nullabbildung $V \to V$, $x \mapsto 0$ ist. Beweisen Sie, daß dann jeder Eigenwert von f eine Wurzel von $P(T)$ ist.

Aufgabe 4. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Summe von zwei diagonalisierbaren 2×2-Matrizen ist diagonalisierbar.

(ii) Das Matrizenprodukt von zwei diagonalisierbaren 2×2-Matrizen ist diagonalisierbar.

Abgabe: Bis Montag der 19.1. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 12

Aufgabe 1. Sei V ein reeller Vektorraum, und $S \subset \mathrm{Mult}_2(V, \mathbb{R})$ die Teilmenge aller Skalarprodukte $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß diese Teilmenge ein *konvexer Kegel* ist. Mit anderen Worten:

(i) Sind Φ_0, Φ_1 zwei Skalarprodukte auf V und ist $t \in [0,1]$ eine reelle Zahl, so ist auch die bilineare Abbildung $\Phi_t = (1-t)\Phi_0 + t\Phi_1$ ein Skalarprodukt auf V.

(ii) Ist Φ ein Skalarprodukt auf V und ist $t > 0$ eine reelle Zahl, so ist auch die bilineare Abbildung $t\Phi$ ein Skalarprodukt auf V.

Aufgabe 2. Sei $V \subset \mathrm{Mat}(2, K)$ der Untervektorraum aller Matrizen A mit Spur $\mathrm{Tr}(A) = 0$. Wir betrachten den Endomorphismus

$$f : V \longrightarrow V, \quad A \longmapsto A^t.$$

Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_f(T) \in K[T]$ und finden Sie heraus, ob f trigonalisierbar oder diagonalisierbar ist. Berücksichtigen Sie dabei auch den Fall $\mathrm{char}(K) = 2$.

Aufgabe 3. Sei E ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum, und $U, V \subset E$ zwei Untervektorräume. Zeigen Sie:

(i) $U \subset V \Rightarrow U^\perp \supset V^\perp$.

(ii) $(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$.

(iii) $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$.

Aufgabe 4. Sind alle symmetrischen Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ diagonalisierbar?

Abgabe: Bis Montag der 26.1. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 13

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß komplexe Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$$

mit $a, d \in \mathbb{R}i$ und $c = -\overline{b}$ diagonalisierbar sind.

Aufgabe 2. Sei $H \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ die Teilmenge der hermiteschen Matrizen.

(i) Verifizieren Sie, daß $H \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ eine Untervektorraum bezüglich der $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur auf $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ ist.

(ii) Geben Sie eine $\mathbb{R}$-Basis von H an und bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(H)$.

Aufgabe 3. Sei $\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$ das komplexe Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$, und $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ eine hermitesche Matrix. Beweisen Sie, daß $\Phi(Ax, x) \in \mathbb{R}$ gilt für alle $x \in \mathbb{C}^n$.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, und $x_1, \ldots, x_n \in V$ eine Basis. Sei $f : V \to V$ der Endomorphismus mit $f(x_i) = x_{i+1}$, wobei der Index modulo n zu verstehen ist.

(i) Berechenen Sie das charakteristische Polynom $\chi_f(T) \in K[T]$.

(ii) Sei $K = \mathbb{C}$. Bestimmen Sie alle Eigenwerte $\epsilon \in \mathbb{C}$ und zeigen Sie, daß $f : V \to V$ diagonalisierbar ist.

(iii) Sei $K = \mathbb{R}$ und $n \geq 3$. Verifizieren Sie, daß f nicht trigonalisierbar ist.

(iv) Sei $K = \mathbb{F}_3$ und $n = 3$. Beweisen Sie, daß $f : V \to V$ trigonalisierbar aber nicht diagonalisierbar ist.

Abgabe: Bis Montag der 2.2. um 11:00 Uhr in den Zettelkästen.

Klausur: Bitte melden Sie sich zur Klausur im HIS-LSF unter der Lehrveranstaltung *Klausur Lineare Algebra I* bis zum 1.2. an. Die zugelassenen Teilnehmer werden durch Aushang bekannt gegeben.

Erlaubte Hilfsmittel: Ein Din-A-4 Blatt (also zwei Seiten) handschriftliche Notizen.

Termine:
Klausur: Montag, 9.2. um 9:00-11:00 Uhr in den Hörsälen 5C und 5D
Klausureinsicht: Freitag, 13.2. um 14:00-15:00 Uhr im Seminarraum 25.13.U1.22