Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 07

Übungen zu Algebraische Geometrie II

Blatt 1

Aufgabe 1.* Sei k ein Grundkörper von Charakteristic $p \neq 2$, der $\sqrt{-1}$ enthalte, zum Beispiel $k = \mathbb{C}$. Konstruieren Sie einen Isomorphismus

$$k[T^{\pm 1}] \longrightarrow k[U, V]/(U^2 + V^2 + 1)$$

von k-Algebren.

Aufgabe 2.* Sei k ein Grundkörper wie in Aufgabe 1. Wir betrachten das homogene quadratische Polynom $f = T_0^2 + T_1^2 + T_2^2$ aus dem Polynomring $A = k[T_0, T_1, T_2]$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Das abgeschlossene Unterschema $Y = V_+(f)$ des 2-dimensionalen projektiven Raumes $\mathbb{P}^2 = \mathrm{Proj}(A)$ ist 1-dimensional und regulär.

(ii) Das abgeschlossene Unterschema $X = V(f)$ des 3-dimensionalen affinen Raumes $\mathbb{A}^3 = \mathrm{Spec}(A)$ ist 2-dimensional und nichtregulär.

Aufgabe 3. Sei X eine irreduzible Kurve mit unendlich vielen Punkten. Zeigen Sie, daß dann jedes offene nichtleere Unterschema $U \subset X$ ebenfalls ein irreduzible Kurve ist.

Aufgabe 4. Sei k ein Grundkörper. Wir betrachten die k-Algebra

$$A = k[[U, V]]/(U^2 + V^3)$$

und das k-Schema $X = \mathrm{Spec}(A)$.

(i) Verifizieren Sie, daß X eine integre Kurve mit genau zwei Punkten $X = \{\sigma, \eta\}$ ist, und daß X nicht regulär ist.

(ii) Zeigen Sie, daß der Bruch U/V ganz über A ist, also einer Ganzheitsgleichung $T^n + \lambda_{n-1}T^{n-1} + \ldots + \lambda_0 = 0$ mit Koeffizienten $\lambda_i \in A$ genügt.

(iii) Was ist die Normalisierung von A?

Abgabe: Bis Montag, den 16.4. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Die zwei Aufgaben mit $*$ sind Präsenzaufgaben, die unter Anleitung in der Übung bearbeitet werden sollen. Die übrigen zwei Aufgaben sind Hausaufgaben.

Mathematisches Institut SS 07
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zu Algebraische Geometrie II

Blatt 2

Aufgabe 1.* Sei X ein Schemata. Zeigen Sie, daß der Diagonalmorphismus

$$\Delta : X \to X \times X$$

affin ist genau dann, wenn für je zwei offen affine Teilmengen $U, V \subset X$ der Durchschnitt $U \cap V$ auch affin ist.

Aufgabe 2.* Sei $f : X \to Y$ ein affiner Morphismus von Schemata. Zur Einfachheit nehmen wir weiterhin an, daß die Diagonale $\Delta : Y \to Y \times Y$ affine ist. Zeigen Sie, daß für jede quasikohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf X und jedes $r \geq 0$ die beiden Kohomologiegruppen

$$H^r(X, \mathcal{F}) \quad \text{und} \quad H^r(Y, f_*(\mathcal{F}))$$

isomorph sind.

Aufgabe 3. Sei $f : X \to Y$ ein affiner Morphismus, und $V \subset Y$ eine offene Teilmenge. Benutzen Sie lediglich die Definition von affinen Morphismen, um zu zeigen, daß auch der induzierte Morphismus $f^{-1}(V) \to V$ affin ist.

Aufgabe 4. Sei R ein integrer Ring, und $R \subset A$ seine Normalisierung. Das *Führerideal* (engl.: *conductor ideal*) $\mathfrak{c} \subset R$ ist dann definiert als das Annulatorideal des R-Moduls A/R, also

$$\mathfrak{c} = \{f \in R \mid fA \subset R\}.$$

Zeigen Sie, daß das Führerideal $\mathfrak{c} \subset R$ nicht nur in R, sondern auch in A ein Ideal ist, und daß es sich daber um das größte Ideal mit dieser Eigenschaft handelt.

Abgabe: Bis Montag, den 23.4. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 07

Übungen zu Algebraische Geometrie II

Blatt 3

Aufgabe 1.* Sei k ein Grundkörper, $n \geq 0$ eine natürliche Zahl, sowie $U = \mathbb{A}^n - \{0\}$ der punktierte n-dimensionale affine Raum. Verifizieren Sie, daß die kanonische Projektion $f : U \to \mathbb{P}^n$ ein affiner Morphismus ist.

Aufgabe 2.* Sei Y ein lokal noethersches Schema und $f : X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus. Sei $x \in X$ ein Punkt mit $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) \geq 1$. Zeigen Sie, daß der induzierte Morphismus $f : X - \{x\} \to Y$ nicht eigentlich ist.

Aufgabe 3. Seien A, B, C Mengen und $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Verifizieren Sie, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Gamma_f} & A \times_C B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f \times \mathrm{id}} \\ B & \xrightarrow[\Delta]{} & B \times_C B \end{array}$$

kommutativ ist, und daß die induzierte Abbildung

$$A \longrightarrow B \times_{(B \times_C B)} (A \times_C B)$$

bijektiv ist.

Aufgabe 4. Sei $f : X \to Y$ ein quasikompakter quasiseparierter Morphismus von Schemata. Zeigen Sie, daß es eine Faktorisierung $f = g \circ h$ gibt, wobei $h : X \to X'$ ein Morphismus mit $h_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_{X'}$ ist und $g : X' \to Y$ ein affiner Morphismus ist.

Abgabe: Bis Montag, den 30.4. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 07

Übungen zu Algebraische Geometrie II

Blatt 4

Aufgabe 1.* Sei X ein Schema, $\mathcal{L}$ eine ample invertierbare Garbe auf X, und $S = \bigoplus H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ der zugehörige graduierte Ring. Sei $r : X \to \mathrm{Proj}(S)$ die resultierende offene Einbettung. Beweisen Sie, daß die offenen Teilmenge $r(X) \subset \mathrm{Proj}(S)$ dicht ist.

Aufgabe 2.* Sei $U \subset X$ ein quasikompaktes Unterschema eines affinen Schemas $X = \mathrm{Spec}(R)$. Zeigen Sie, daß jeder quasikohärenter $\mathcal{O}_U$-Modul global erzeugt ist, und daß jedes $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(U)$ ampel ist.

Aufgabe 3. Sei X ein Schema, $\mathcal{L}$ eine ample invertierbare Garbe auf X. Sei nun $f \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ ein beliebiger globaler Schnitt. Muß die Nichtverschwindungsmenge $X_f \subset X$ affin sein?

Aufgabe 4. Sei U ein quasikompaktes quasisepariertes Schema. Zeigen Sie, daß es eine offene Einbettung $U \subset X$ in ein affines Schema $X = \operatorname{Spec}(R)$ gibt genau dann, wenn die invertierbare Garbe $\mathcal{L} = \mathcal{O}_U$ ampel ist.

Bemerkung: Unterschemata von affinen Schemata bezeichnet man als *quasiaffine Schemata.*

Abgabe: Bis Montag, den 14.5. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 07

Übungen zu Algebraische Geometrie II

Blatt 5

Aufgabe 1.* Sei $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^n$ über einem Grundkörper k. Wir nehmen an, daß $\mathcal{F}$ eine *Wolkenkratzergarbe* ist, also ihr Träger $\mathrm{Supp}(\mathcal{F}) \subset \mathbb{P}^n$ aus endlich vielen abgeschlossenen Punkten besteht. Zeigen Sie, daß

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{E}) = 0$$

für alle $0 \leqslant i < n$ und alle lokal freien Garben $\mathcal{E}$ gilt.

Aufgabe 2.* Sei $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf dem projektivem Raum $\mathbb{P}^n$ über einem Grundkörper k. Wir nehme an, daß $\mathcal{F}$ eine *Torsionsgarbe* ist, also $\mathcal{F}_\eta = 0$. Zeigen Sie, daß dann $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}) = 0$ gilt.

Aufgabe 3. Wir arbeiten über einem Grundkörper k. Betrachte die folgende lokal freier Garbe $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(s) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(t)$ vom Rang zwei auf $\mathbb{P}^2$. Drücken sie die Euler-Charakteristik

$$\chi(\mathcal{E}) = h^0(\mathcal{E}) - h^1(\mathcal{E}) + h^2(\mathcal{E})$$

durch ein quadratisches Polynom in den *Chern-Zahlen* $c_1 = s+t$ und $c_2 = st$ aus.

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum, $V \subset X$ eine offene Teilmenge, $j : V \to X$ die zugehörige Inklusionsabbildung, und $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf V. Wir definieren eine abelsche Garbe $j_!(\mathcal{F})$ auf X als Garbifizierung der Prägarbe

$$U \longmapsto \begin{cases} \Gamma(U, \mathcal{F}) & \text{wenn } U \subset V; \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei die Restriktionsabbildungen die offensichtlichen sind.

(i) Konstruieren Sie eine Inklusion von Prägarben $i_!(\mathcal{F}) \subset i_*(\mathcal{F})$.

(ii) Zeigen Sie, daß der Funktor

$$(\mathrm{Ab}/V) \longrightarrow (\mathrm{Ab}/X), \quad \mathcal{F} \longmapsto i_!(\mathcal{F})$$

exakt ist.

(iii) Beweisen Sie, daß für alle abelsche Garbe $\mathcal{G}$ auf X gilt:

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}|_V) = \mathrm{Hom}(i_!(\mathcal{F}), \mathcal{G}).$$

(iv) Folgern Sie, daß zu jeder injektiven abelschen Garbe $\mathcal{I}$ auf X die Einschränkung $\mathcal{I}|_V$ eine injektiven abelschen Garbe $\mathcal{I}$ auf V ist.

Abgabe: Bis Montag, den 21.5. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 07

Übungen zu Algebraische Geometrie II

Blatt 6

Aufgabe 1.* Sei C eine eigentliche Kurve ohne eingebettete Komponenten über einem Grundkörper, $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_C$ ein kohärentes Ideal, und $C' \subset C$ das zugehörige abgeschlossene Unterschema. Angenommen, C' ist auch eine Kurve ohne eingebettete Komponenten. Verifizieren Sie, daß die sogenannte *Adjunktionsformel*

$$\omega_{C'} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_{C'}, \omega_C)$$

für die dualisierenden Garben gilt.

Aufgabe 2.* Sei C eine eigentliche Kurve über einem Grundkörper, sowie $C' \subset C$ ein abgeschlossenens Unterschema, und $\mathcal{L}'$ ein invertierbarer $\mathcal{O}_{C'}$-Modul. Zeigen Sie, daß es einen invertierbaren $\mathcal{O}_C$-Modul $\mathcal{L}$ gibt mit er Eigenschaft $\mathcal{L}|_{C'} \simeq \mathcal{L}'$.

Aufgabe 3. Sei C eine eigentliche Kurve über einem Grundkörper, und $C' \subset C$ ein abgegschlossenen Unterschema, das selber eine Kurve ist. Seien $p_a = h^1(\mathcal{O}_C)$ und $p'_a = h^1(\mathcal{O}_{C'})$ ihre arithmetischen Geschlechter. Zeigen Sie, daß dann $p'_a \leqslant p_a$ gilt.

Aufgabe 4. Sei X ein Schema, $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$ eine ample invertierbare Garbe, und $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ einen beliebige Teilmenge mit endlich vielen Elementen. Zeigen Sie, daß es ein $t \geq 1$ und einen Schnitt $f \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes t})$ gibt so, daß $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X_f$ gilt.

Abgabe: Bis Dienstag, den 29.5. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 07

Übungen zu Algebraische Geometrie II

Blatt 7

Aufgabe 1.* Sei C eine integre eigentliche Kurve. Gegeben seien zwei invertierbare Garben $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ mit $\deg(\mathcal{L}_1) < \deg(\mathcal{L}_2)$. Zeigen Sie, daß dann

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1) = 0$$

gilt. Gilt diese Aussage auch für Kurven, die nicht integer sind?

Aufgabe 2.* Sei C eine integre eigentliche Kurve mit $h^0(\mathcal{O}_C) = 1$ und arithmetischem Geschlecht $p_a = h^1(\mathcal{O}_C)$. Sei

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{L}_2 \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von kohärenten Garben auf C mit $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ invertierbar. Angenommen, die dualisierende Garbe ω_C ist invertierbar, und es gelte

$$\deg(\mathcal{L}_2) + 2p_a < \deg(\mathcal{L}_2) + 2.$$

Zeigen Sie, daß die kurze exakte Sequenz spalten muß.

Aufgabe 3. Sei C eine integre eigentliche Kurve mit $h^0(\mathcal{O}_C) = 1$ und dualisierender Garbe $\omega_C \simeq \mathcal{O}_C$. Zeigen Sie, daß

$$h^0(\mathcal{L}) = \deg(\mathcal{L})$$

für alle $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic}(C)$ mit $\deg(\mathcal{L}) > 0$ gilt.

Aufgabe 4. Sei X ein eigentliches Schema über einem noetherschen Grundring R, und $X_{\mathrm{red}} \subset X$ das zugehörige reduzierte abgeschlossene Unterschema. Sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X. Zeigen Sie, daß $\mathcal{L}$ genau dann ampel auf X ist, wenn seine Einschränkung $\mathcal{L}|_{X_{\mathrm{red}}}$ ampel auf X_{red} ist.

Abgabe: Bis Montag, den 4.6. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 07

Übungen zu Algebraische Geometrie II

Blatt 8

Aufgabe 1.* Sei E eine reguläre integre Kurve vom arithmetischen Geschlecht $p_a = 1$. Sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf E vom Grad $\deg(\mathcal{L}) = 1$. Zeigen Sie, daß dann $\mathcal{L}$ nicht global erzeugt sein kann.

Aufgabe 2.* Sei X ein projektives $\mathbb{C}$-Schema. Zeigen Sie, daß es endlich viele komplexe Zahlen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ mit der folgenden Eigenschaft gibt: Es gibt ein projektives Schema Y über dem Unterkörper $K = \mathbb{Q}(z_1, \ldots, z_n)$ und einen $\mathbb{C}$-Isomorphismus $Y \otimes_K \mathbb{C} \to X$.

Aufgabe 3. Sei C eine eine eigentliche Kurve, die irreduzible und Cohen-Macaulay ist. Angenommen, es gibt eine invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ vom Grad $\deg(\mathcal{L}) = 1$ auf C. Zeigen Sie, daß C reduziert sein muß.

Aufgabe 4. Sei C eine reguläre eigentliche Kurve über einem Grundkörper k mit $h^0(\mathcal{O}_C) = 1$ und arithmetischem Geschlecht $p_a = 0$. Zeigen Sie, daß es es einen abgeschlossenen Punkt $x \in C$ gibt mit der Eigenschaft

$$[\kappa(x) : k] \leqslant 2.$$

Abgabe: Bis Montag, den 11.6. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 07

Übungen zu Algebraische Geometrie II

Blatt 9

Aufgabe 1.* Sei k ein Grundkörper, $f \in k[T_0, T_1, T_2]$ ein homogenes Polynom vom Grad $d \geq 1$, und $C = V_+(f)$ die zugehörige projektive Kurve im $\mathbb{P}^2$. Zeigen Sie, daß dann

$$h^0(\mathcal{O}_C) = 1 \quad \text{und} \quad h^1(\mathcal{O}_C) = (d-1)(d-2)/2$$

gilt.

Aufgabe 2.* Sei $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ die projektive Kurve über den reellen Zahlen, welche durch die quadratische homogene Gleichung $T_0^2 + T_1^2 + T_2^2 = 0$ definiert wird. Zeigen Sie, daß es kein $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic}(C)$ vom Grad $\deg(\mathcal{L}) = 1$ geben kann.

Aufgabe 3. Sei $f : C \to C'$ ein surjektiver Morphismus zwischen irreduziblen eigentlichen k-Kurven. Zeigen Sie, daß f ein affiner Morphismus ist.

Aufgabe 4. Sei k ein Körper und X ein eigentliches k-Schema. Sei $k \subset k'$ eine Körpererweiterung, $X' = X \otimes_k k'$ das induzierte eigentliche k'-Schema, und $p : X' \to X$ die kanonische Projektion. Sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X, deren Urbild $\mathcal{L}' = p^*(\mathcal{L})$ auf X' ampel ist. Zeigen Sie, daß dann auch $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$ ampel ist.

Abgabe: Bis Montag, den 18.6. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 07

Übungen zu Algebraische Geometrie II

Blatt 10

Aufgabe 1.* Sei C eine Kurve vom Geschlecht $g = 2$, und $x, x' \in C$ zwei Weierstraß-Punkte. Zeigen Sie, daß die invertierbaren Garben $\mathcal{O}_C(2x)$ und $\mathcal{O}_C(2x')$ isomorph sind.

Aufgabe 2.* Sei C eine Kurve vom Geschlecht $g = 2$. Zeigen Sie, daß es genau ein $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(C)$ vom Grad $\deg(\mathcal{L}) = 2$ mit $h^0(\mathcal{L}) \geq 2$ gibt, nämlich die dualisierende Garbe $\mathcal{L} = \omega_C$.

Aufgabe 3. Sei C eine Kurve vom Geschlecht $g = 2$ über einem Grundkörper k von Charakteristik $p = 2$. Zeigen Sie, daß es höchstens 3 Weierstraß-Punkte $x_1, x_2, x_3 \in C$ geben kann.

Aufgabe 4. Sei C eine Kurve vom Geschlecht $g = 2$. Angenommen, es gibt eine surjektive Abbildung $f : C \to E$ auf eine elliptische Kurve. Wir nehmen an, daß die Erweiterung der Funktionenköper $\kappa(E) \subset \kappa(C)$ separabel ist. Zeigen Sie, daß es höchstens zwei Verzweigungspunkte $x \in C$ geben kann.

Abgabe: Bis Montag, den 25.6. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.