Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 06/07

Übungen zu Algebraische Geometrie I

Blatt 1

Aufgabe 1. (i) Sei R ein Ring, und $f \in R$ ein beliebiges Element. Zeigen Sie, daß $\operatorname{Spec}(R) = D(f) \cup D(1-f)$ gilt.

(ii) Sei nun R ein Hauptidealring. Verifizieren sie, daß alle offenen Teilmengen $U \subset \operatorname{Spec}(R)$ von der Form $U = D(f)$ für ein $f \in R$ sind.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring und $S \subset R$ eine multiplikative Teilmenge. Wir betrachten die Lokalisierung $R' = S^{-1}R$ und die Lokalisierungsabbildung $\varphi : R \to R'$, $f \mapsto f/1$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, so gilt $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}R')$.

(ii) Ist $\mathfrak{p}' \subset R'$ ein Primidal, so gilt $\mathfrak{p}' = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}')R'$.

Aufgabe 3. Wir betrachten den Endomorphismus von Ringen

$$\varphi : \mathbb{C}[T] \longrightarrow \mathbb{C}[T], \quad T \longmapsto T^2 + 1.$$

Beschreiben sie die induzierte stetige Abbildung

$$\operatorname{Spec}(\varphi) : \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[T]) \longrightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[T])$$

auf dem Spektrum, indem sie die Bilder der Punkte η und x_z, $z \in \mathbb{C}$ angeben. Zur Erinnerung: $\mathfrak{p}_\eta = 0$ und $\mathfrak{p}_{x_z} = (T - z)$.

Aufgabe 4. Bekanntlich sind Polynomringe über Körpern euklidisch, insbesondere Hauptidealringe und faktoriell. Wir betrachten hier die Inklusion $\varphi : \mathbb{R}[T] \to \mathbb{C}[T]$ der Polynomringe über den reellen bzw. komplexen Zahlen.

(i) Zeigen Sie, daß die irreduzible Polynome $g \in \mathbb{R}[T]$ genau die von der Form $g = T - r$ mit $r \in \mathbb{R}$, und $g = (T - z)(T - \bar{z})$ mit $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ sind.

(ii) Geben Sie alle Primideale $\mathfrak{p} \subset \mathbb{R}[T]$ an.

(iii) Skizzieren Sie $\mathrm{Spec}(\mathbb{R}[T])$ und die offenen Mengen der Zariski-Topologie.

(iv) Wir betrachten die induzierte stetige Abbildung

$$\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[T]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[T]).$$

Geben Sie zu jedem Punkt $x \in \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[T])$ das Bild an. Ist die Abbildung $\mathrm{Spec}(\varphi)$ injektiv oder surjektiv?

Abgabe: Bis Montag, den 30.10. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 06/07

Übungen zu Algebraische Geometrie I

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei R ein Ring. Wir betrachten den Homomorphismus

$$\varphi : R \longrightarrow \prod_{x \in \operatorname{Spec}(R)} \kappa(x), \quad f \longmapsto (f(x))_{x \in \operatorname{Spec}(R)}.$$

Zeigen Sie, daß der Kern von φ das Radikal $\operatorname{Rad}(R) = \{f \in R \mid f \text{ nilpotent}\}$ ist.

Anmerkung: Läßt man das Produkt der Restekörper $\kappa(x)$ nur über die abgeschlossenen Punkte laufen, so erhält man als Kern das sogenannte *Jacobson-Radikal*.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring. Elemente $e \in R$ mit $e^2 = e$ bezeichnet man als *idempotent*.

(i) Sei $e \in R$ idempotent. Verifizieren Sie, daß dann auch $1 - e \in R$ idempotent ist, und daß $e(1 - e) = 0$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, daß $D(e) = V(1 - e)$ als Teilmenge von $\operatorname{Spec}(R)$ für alle Idempotente $e \in R$ gilt. Insbesondere sind diese Teilmengen gleichzeitig offen und abgeschlossen.

(iii) Deduzieren Sie, daß der topologische Raum $\operatorname{Spec}(R)$ nicht zusammenhängend ist, falls es eine Zerlegung $R = R_1 \times R_2$ in ein Produkt von zwei Ringen $R_1, R_2 \neq 0$ gibt.

Aufgabe 3. Ein Ring R heißt *noethersch*, wenn jede aufsteigende Kette von Idealen $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \ldots$ stationär wird, also $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n+1} = \ldots$ ab einem Index $n \geq 1$. Ein topologischer Raum X heißt *noethersch*, wenn jede aufsteigende Kette von offenen Teilmengen $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$ stationär wird.

(i) Sei R ein noetherscher Ring. Zeigen Sie, daß dann auch der topologische Raum $X = \mathrm{Spec}(R)$ noethersch ist.

(ii) Gilt die Umkehrung?

Aufgabe 4. Seien $(A, \mathfrak{m})$ und $(A', \mathfrak{m}')$ zwei lokale Ringe; mit anderen Worten, $\mathfrak{m} \subset A$ und $\mathfrak{m}' \subset A'$ sind die einzigen maximalen Ideale. Sei $\varphi : A \to A'$ ein Homomorphismus von Ringen. Verifizieren Sie, daß die folgenden sechs Bedingungen äquivalent sind:

(i) $\varphi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}'$.

(ii) $\mathfrak{m} \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{m}')$.

(iii) $\mathfrak{m} = \varphi^{-1}(\mathfrak{m}')$.

(iv) $A^\times = \varphi^{-1}(A'^\times)$.

(v) Der Ringhomomorphismus $\varphi : A \to A'$ induziert eine Körpererweiterung zwischen den Restekörper $A/\mathfrak{m} \to A'/\mathfrak{m}'$.

(vi) Der abgeschlossene Punkt $x' \in \mathrm{Spec}(A')$ wird von der Abbildung $\mathrm{Spec}(\varphi)$ auf den abgeschlossenen Punkt $x \in \mathrm{Spec}(A)$ abgebildet.

Bemerkung: Ringhomomorphismen zwischen lokalen Ringen, welche die obigen äquivalenten Bedingungen erfüllen, bezeichnet man als *lokal*.

Abgabe: Bis Montag, den 6.11. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 06/07

Übungen zu Algebraische Geometrie I

Blatt 3

Aufgabe 1. Ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ bezeichnet man als *leer*, wenn der zugrundeliegende topologische Raum X leer ist. Zeigen sie: Ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ ist leer genau dann, wenn der Ring der globalen Schnitte $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ der Nullring ist.

Aufgabe 2. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema. Zu jeder offenen Teilmenge $U \subset X$ sei $\mathcal{F}(U) \subset \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ die Teilmenge der lokalen Schnitte $e \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, die idempotent sind, also $e^2 = e$ erfüllen.

(i) Verifizieren Sie, daß für alle Inklusionen $U \subset V$ die Restriktionsabbildung res_U^V der Garbe $\mathcal{O}_X$ die Teilmenge $\mathcal{F}(V)$ in die Teilmenge $\mathcal{F}(U)$ abbildet.

(ii) Zeigen Sie, daß die so definierte Prägarbe $\mathcal{F}$ eine Garbe ist.

Aufgabe 3. Ein Ring R bezeichnet man als *reduziert*, wenn sein Radikal $\mathrm{Rad}(R) = \sqrt{0}$ das Nullideal ist. Sei nun $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema. Beweisen Sie, daß die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

(i) Es gibt eine affine offene Überdeckung $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ so, daß die Ringe der lokalen Schnitte $\Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_X)$ reduziert sind.

(ii) Für jede offen Teilmenge $U \subset X$ ist der Ring $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ reduziert.

Schemata mit diesen äquivalenten Eigenschaften bezeichnet man als *reduziert*. Gilt die entsprechende Äquivalenz zwischen (i) und (ii), wenn die Eigenschaft ,,reduziert" durch die Eigenschaft ,,integer" ersetzt wird?

Aufgabe 4. Konstruieren Sie ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$, das nichtreduziert ist, aber dessen Ring der globalen Schnitte $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ reduziert ist.

Tip: Modifizieren sie die Konstruktion der projektiven Gerade $\mathbb{P}^1_k$ aus der Vorlesung, indem sie statt dem Ring der Laurent-Polynome $k[T, T^{-1}]$ den nichtreduzierten Ring $k[\epsilon, T, T^{-1}]/(\epsilon^2)$ verwenden.

Abgabe: Bis Montag, den 13.11. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 06/07

Übungen zu Algebraische Geometrie I

Blatt 4

Aufgabe 4. Sei k ein Körper. Zeigen Sie, daß der Ring der formalen Potenzreihen $k[[T]]$ ein lokaler Ring ist, mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = (T)$.

Aufgabe 2. (i) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen, und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Verifizieren Sie, daß $(g \circ f)_*(\mathcal{F}) = g_*(f_*(\mathcal{F}))$ gilt.

(ii) Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, daß jeder Morphismus von Garben $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ auf X einen Morphismus $f_*(\psi) : f_*(\mathcal{F}) \to f_*(\mathcal{G})$ zwischen den direkten Bildgarben auf Y induziert.

(iii) Benutzen sie das Vorangegangene, um in der Kategorie der geringten Räume die Verkettung von Morphismen $(g, \theta) \circ (f, \psi)$ explizit zu beschreiben.

Aufgabe 3. Sei $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$ und $Y = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Bestimmen Sie alle Morphism von geringten Räumen $f : X \to Y$. Welche davon sind Morphismen von Schemata?

Aufgabe 4. Sei k ein Körper. Wir benutzen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & k[T,T^{-1}] & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ k[T] & & k[T] \end{array}$$

von Ringen, um in Analogie zur projektiven Geraden durch Verkleben ein Schema $X = U \cup V$ zu definieren. Hier gilt also

$$U = \mathrm{Spec}(k[T]), \quad V = \mathrm{Spec}(k[T]), \quad \text{und} \quad U \cap V = \mathrm{Spec}(k[T,T^{-1}]).$$

(i) Skizzieren Sie den topologischen Raum X.

(ii) Zeigen Sie, daß der Ring der globalen Schnitte $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k[T]$ ist.

(iii) Folgern Sie daraus, daß das Schema X nicht isomorph zur projektiven Gerade $\mathbb{P}^1_k$ ist.

(iv) Beweisen Sie, daß das Schema X nicht affin ist. Tip: Konstruieren Sie einen Automorphismus von X, der die Identität auf den globalen Schnitten induziert, um zu zeigen, daß die kanonische Abbilung

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Sch}}(X,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(\Gamma(X,\mathcal{O}_X), \Gamma(X,\mathcal{O}_X))$$

nicht bijektiv ist.

Abgabe: Bis Montag, den 20.11. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 06/07

Übungen zu Algebraische Geometrie I

Blatt 5

Aufgabe 1. Sei X ein Schema, $U \subset X$ ein offenes Unterschema, sowie $i : U \to X$ der Inklusionsmorphismus. Zeigen Sie, daß für alle Punkte $x \in U$ die induzierte Abbildung zwischen den Halmen $\psi_x : \mathcal{O}_{X,i(x)} \to \mathcal{O}_{U,x}$ bijektiv ist.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring, $f \in R$ ein Element, und $D(f) \subset \operatorname{Spec}(R)$ die zugehörige offene Teilmenge.

(i) Sei $g \in R$ ein Element mit $D(g) \subset D(f)$. Zeigen Sie, daß die Ringe R_g und $(R_f)_{g/1}$ isomorph sind.

(ii) Folgern Sie, daß die Einschränkung der Strukturgarbe $\widetilde{R}$ auf die offene Teilmenge $D(f) \simeq \operatorname{Spec}(R_f)$ isomorph zur Strukturgarbe $\widetilde{R_f}$ ist.

Aufgabe 3. Sei $\mathbb{Q} \subset E$ ein quadratischer Zahlkörper und $X = \operatorname{Spec}(E)$ sein Spektrum.

(i) Konstruieren Sie einen Isomorphismus von Ringen $E \otimes_{\mathbb{Q}} E \to E \times E$.

(ii) Folgern Sie, daß das Faserprodukt $X \times_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Q})} X$ aus zwei Punkten besteht.

Aufgabe 4. Sei k ein Körper, und $k \subset k'$ eine Körpererweiterung.

(i) Sei X ein k-Schema. Zeigen Sie, daß X leer ist genau dann, wenn das Faserprodukt $X \otimes_k k' = X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(k')$ leer ist.

(ii) Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von k-Schemata. Beweisen Sie, daß die Abbildung f surjektiv ist genau dann, wenn die induzierte Abbildung $f' : X \otimes_k k' \to Y \otimes_k k'$ surjektiv ist.

Abgabe: Bis Montag, den 27.11. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Klausur: Am Montag, den 5.2.07 um 9:00 Uhr st im Hörsaal 5G.
Erlaubte Hilfsmittel: Ihre Vorlesungsmitschrift.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 06/07

Übungen zu Algebraische Geometrie I

Blatt 6

Aufgabe 1. Sei k ein Grundkörper. Die Inklusion der Ringe $k[T_1] \subset k[T_1, T_2]$ liefert einen Morphismus von Schemata $f : \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^1_k$. Sei $\eta \in \mathbb{A}^1_k$ der generische Punkt. Zeigen Sie, daß die schematische Faser $f^{-1}(\eta)$ isomorph zur affinen Gerade $\mathbb{A}^1_L$ über dem Körper $L = k(T_1)$ der rationalen Funktionen ist.

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^1 \longrightarrow \mathcal{I}^2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{I}^s \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

eine Sequenz von abelschen Garben auf X. Die Garben $\mathcal{I}^1, \ldots, \mathcal{I}^s$ seien injektiv. Zeigen Sie, daß $H^r(X, \mathcal{G}) \simeq H^{r+s}(X, \mathcal{F})$ für $r \geq 1$ gilt.

Aufgabe 3. Sei X ein diskreter Raum (das heißt, jede Teilmenge $U \subset X$ ist offen). Zeigen Sie, daß $H^r(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle abelschen Garben $\mathcal{F}$ und alle $r \geq 1$.

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X, und $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}^0 \to \mathcal{I}^1 \to \ldots$ eine injektive Auflösung von $\mathcal{F}$. Wir betrachten nun eine weitere Auflösung $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{C}^0 \to \mathcal{C}^1 \to \ldots$ von $\mathcal{F}$, wobei hier die $\mathcal{C}^i$ beliebige abelsche Garben sind. Beweisen Sie, daß es Homomorphismen $\varphi_i : \mathcal{C}^i \to \mathcal{I}^i$ gibt so, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{C}^0 & \longrightarrow & \mathcal{C}^1 & \longrightarrow & \ldots \\
 & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & {\scriptstyle \varphi_0}\downarrow & & {\scriptstyle \varphi_1}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{I}^0 & \longrightarrow & \mathcal{I}^1 & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

kommutativ ist.

Abgabe: Bis Montag, den 4.12. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 06/07

Übungen zu Algebraische Geometrie I

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von abelschen Garben. Angenommen, die induzierte Abbildung $H^1(X, \mathcal{F}') \to H^1(X, \mathcal{F})$ ist injektiv. Folgern Sie, daß jeder globale Schnitt von $\mathcal{F}''$ das Bild eines globalen Schnittes von $\mathcal{F}$ ist.

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum.

(i) Seien $\mathcal{I}, \mathcal{I}'$ zwei injektive Garben auf X. Zeigen Sie, daß die Summe $\mathcal{I} \oplus \mathcal{I}'$ ebenfalls injektiv ist.

(ii) Folgern Sie daraus, daß $H^r(X, \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}') \simeq H^r(X, \mathcal{F}) \oplus H^r(X, \mathcal{F}')$ für alle abelschen Garben $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ auf X gilt.

Aufgabe 3. Sei k ein Grundkörper. Wir definieren durch Verklebung ein k-Schema $X = U_1 \cup U_2$, wobei

$$U_1 = \operatorname{Spec}(k[T^2, T^3]), \quad U_2 = \operatorname{Spec}(k[T^{-2}, T^{-3}]), \quad U_1 \cap U_2 = \operatorname{Spec}(k[T^{\pm 1}]).$$

Berechnen Sie die Kohomologiegruppen $H^r(X, \mathcal{O}_X)$, $r \geq 0$.

Aufgabe 4. Sei X das k-Schema aus Aufgabe 3. Wir betrachten den $k[T^2, T^3]$-Modul $M_1 = k[T^2, T^3]T^{-1} \subset k[T^{\pm 1}]$ und den $k[T^{-2}, T^{-3}]$-Modul $M_2 = k[T^{-2}, T^{-3}]T \subset k[T^{\pm 1}]$. Durch Verklebung erhalten wir eine abelsche Garbe $\mathcal{L}$ auf X mit

$$\mathcal{L}|_{U_1} = \widetilde{M_1} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}|_{U_2} = \widetilde{M_2}.$$

Berechnen Sie die Kohomologiegruppen $H^r(X, \mathcal{L})$, $r \geq 0$.

Abgabe: Bis Montag, den 11.12. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 06/07

Übungen zu Algebraische Geometrie I

Blatt 8

Aufgabe 1. Sei X ein Schema, und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_3 \longrightarrow \mathcal{F}_4 \longrightarrow \mathcal{F}_5 \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Angenommen, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5$ sind quasikohärent. Zeigen Sie, daß dann auch $\mathcal{F}_3$ quasikohärent ist.

Aufgabe 2. Sei X Schema und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Zeigen Sie, daß die beiden abelschen Gruppen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ und $\Gamma(X, \mathcal{F})$ kanonisch isomorph sind.

Aufgabe 3. Sei X ein Schema, und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Zeigen Sie, daß die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) Für jede affine offene Teilmenge $U \subset X$ ist $\mathcal{F}|_U \simeq \widetilde{M}$ für einen Modul M über dem Ring $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$.

(ii) Es gibt eine affine offene Überdeckung $X = \bigcup U_\alpha$ so, daß $\mathcal{F}|_{U_\alpha} \simeq \widetilde{M}_\alpha$ für einen Modul M_α über dem Ring $\Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_X)$.

Aufgabe 4. Sei X ein quasikompaktes Schema. Angenommen, der Durchschnitt von je zwei affinen offenen Teilmengen ist wieder affin. Zeigen Sie, daß es eine natürliche Zahl $n \geq 0$ gibt so, daß $H^r(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle quasikohärenten Garben $\mathcal{F}$ und alle natürlichen Zahlen $r \geq n$ gilt.

Abgabe: Bis Montag, den 18.12.06 um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 06/07

Übungen zu Algebraische Geometrie I

Blatt 9

Aufgabe 1. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Einbettungen von Schemata. Zeigen Sie, daß die Verkettung $g \circ f : X \to Z$ ebenfalls eine Einbettung ist.

Aufgabe 2. (i) Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, daß X Hausdorff ist genau dann, wenn die Teilmenge $\{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ abgeschlossen ist.

(ii) Sei $X = \operatorname{Spec}(\mathbb{C})$ und $S = \operatorname{Spec}(\mathbb{R})$. Beschreiben Sie das Schema $X \times_S X$ und das abgeschlossene Unterschema $\Delta_{X/S} \subset X \times_S X$.

(iii) Sei S ein Schema und X ein S-Schema. Angenommen, ein Punkt $z \in X \times_S X$ hat die Eigenschaft $\operatorname{pr}_1(z) = \operatorname{pr}_2(z)$. Gilt dann notwendigerweise $z \in \Delta_{X/S}$?

Aufgabe 3. Sei X ein Schema, und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Angenommen, $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_3$ sind quasikohärent. Beweisen Sie explizit, daß dann auch $\mathcal{F}_2$ quasikohärent ist.

Tip: Reduzieren Sie auf den Fall, daß X affin ist; wenden Sie dann Serres Verschwindungssatz auf $H^1(X, \mathcal{F}_1)$ und das Fünferlemma mit den Abbildungen $\widetilde{\Gamma(X, \mathcal{F}_i)} \to \mathcal{F}_i$ an.

Aufgabe 4. Sei X ein noethersches Schema. Ist dann das Schema $X \times X$ ebenfalls noethersch?

Abgabe: Bis Montag, den 8.1. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Frohe Weihnachten und guten Rutsch!

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 06/07

Übungen zu Algebraische Geometrie I

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei $f : X \to Y$ eine abgeschlossene Einbettung von Schemata. Zeigen Sie, daß der Morphismus $f : X \to Y$ vom endlichen Typ ist.

Aufgabe 2. (i) Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, daß X noethersch ist genau dann, wenn jede offene Teilmenge $U \subset X$ quasikompakt ist.

(ii) Folgern Sie: Ist X ein noethersches Schema, so ist jeder Morphismus $f : X \to Y$ in ein anderes Schema Y quasikompakt.

Aufgabe 3. Ein Schema X bezeichnet man als *quasisepariert*, wenn der Diagonalmorphismus $\Delta : X \to X \times X$ quasikompakt ist. Zeigen Sie, daß X quasisepariert ist genau dann, wenn für alle affinen offenen Teilmengen $U, U' \subset X$ der Durchschnitt $U \cap U'$ die Vereinigung von endlich vielen affinen offenen Teilmengen ist.

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf einem topologischen Raum X, und $Z \subset X$ eine lokal abgeschlossene Teilmenge. Wir definieren die abelsche Gruppe $\Gamma_Z(\mathcal{F})$ der *Schnitte mit Träger in Z* durch

$$\Gamma_Z(\mathcal{F}) = \{s \in \Gamma(U, \mathcal{F}) \mid \operatorname{Supp}(s) \subset A\}.$$

Hierbei schreiben wir $Z = U \cap A$, wobei $U \subset X$ offen und $A \subset X$ abgeschlossen ist, und $\operatorname{Supp}(s) = \{x \in U \mid s_x \neq 0\}$ der Träger von s ist. Beweisen Sie, daß die Definition von $\Gamma_Z(\mathcal{F})$ nur von Z, nicht jedoch von der Wahl von U und A abhängt.

Bemerkung: Die abgeleiteten Funktoren $H^n_Z(X, \mathcal{F})$, $n \geq 0$ von $\Gamma_Z(\mathcal{F})$ bezeichnet man als *Kohomologie mit Träger*.

Abgabe: Bis Montag, den 25.1.07 um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 06/07

Übungen zu Algebraische Geometrie I

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei X ein lokal geringter Raum, und $\psi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ ein Homomorphismus zwischen invertierbaren $\mathcal{O}_X$-Moduln. Angenommen, ψ ist surjektiv. Zeigen Sie, daß ψ dann sogar bijektiv sein muß.

Aufgabe 2. Seien X ein Schema, und $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ zwei quasikohärente $\mathcal{O}_X$-Moduln. Zeigen Sie, daß der $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ ebenfalls quasikohärent ist.

Aufgabe 3. Seien $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ zwei invertierbare Garben auf $\mathbb{P}^1_k$. Zeigen Sie, daß die Gruppe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ der Homomorphismen $\psi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ genau dann nichttrivial ist, wenn $\deg(\mathcal{L}) \leqslant \deg(\mathcal{L}')$.

Aufgabe 4. Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ zwei natürliche Zahlen, und

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von kohärenten Garben auf $\mathbb{P}^1_k$. Angenommen, es gilt $m \geq n - 2$. Zeigen Sie, daß diese kurze exakte Sequenz spaltet, also $\mathcal{F} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$.

Abgabe: Bis Montag, den 22.1.07 um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 06/07

Übungen zu Algebraische Geometrie I

Blatt 12

Aufgabe 1. (i) Sei X ein geringter Raum und $\mathcal{E}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul vom Rang $n \geq 0$. Beweisen Sie, daß $\mathcal{E}$ isomorph zu seinem bidualen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{E}^{\vee\vee} = \mathcal{H}om(\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X)$ ist.

(ii) Muß $\mathcal{E}$ isomorph zu seinem dualen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{E}^{\vee} = \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$ sein?

Aufgabe 2. Sei $S = \bigoplus_{n \geq 0} S_n$ ein graduierter Ring, der integer ist. Zeigen Sie, daß das Schema $\operatorname{Proj}(S)$ ebenfalls integer ist.

Aufgabe 3. Sei $S = \bigoplus_{n \geq 0} S_n$ ein noetherscher graduierter Ring. Zeigen Sie, daß das Schema $\operatorname{Proj}(S)$ genau dann leer ist, wenn das irrelevante Ideal $S_+ \subset S$ nilpotent ist.

Aufgabe 4. (i) Sei $S = \bigoplus_{n \geq 0} S_n$ ein graduierter Ring, und $f \in S_+$ ein homogenes Element vom Grad $d > 0$. Zeigen Sie, daß der d-te Veronese-Unterring

$$(R_f)^{(d)} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} (R_f)_{md}$$

isomorph zum Ring der Laurent-Polynome mit Koeffizienten in $R_{(f)}$ ist.

(ii) Was bedeutet dies anschaulich für den kanonischen Morphismus von Schemata $\operatorname{Spec}(S) \setminus V(S_+) \to \operatorname{Proj}(S)$?

Abgabe: Bis Montag, den 29.1. um 9:10 Uhr in den Zettelkästen.