Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer
Dr. Christian Liedtke

SS 06

Seminar Tor und Ext

1. Das Zornsche Lemma von Friedrich Panitz am 06.04.
Referenz: [7], Appendix 2, §2.

- Geben Sie das Zornsche Lemma an.
- Diskutieren Sie die folgenden beiden Anwendungen: Jeder Vektorraum besitzt eine Basis; jede Menge kann wohlgeordnet werden.
- Beweisen Sie das Zornsche Lemma.

2. Divisible abelsche Gruppen von Patrick Jansen am 13.04.
Referenz: [6], Seite 7–12.

- Führen Sie den Begriff der divisiblen Gruppe ein.
- Beweisen Sie die Struktursätze für divisible Gruppen.

3. Freie abelsche Gruppen von Sophia Wiegand am 20.04.

- Diskutieren Sie den Begriff der freien abelschen Gruppe [7], Chapter I, §9. Beweisen Sie, daß jede Untergruppe einer freien abelschen Gruppe wieder frei ist (loc. cit. Seite 46, und Seite 693).
- Folgern sie, daß jede abelsche Gruppe der Kokern einer injektiven Abbildung von freien abelschen Gruppen ist, und ebenso Kern einer injektiven Abbildung von divisiblen abelschen Gruppen ist.

4. Die Baer-Summe von Lisa Bettermann am 27.04.
Referenz: [8], Seite 161–167.

- Führen Sie den Begriff der Extension von abelschen Gruppen ein.
- Zeigen Sie, daß die Baer-Summe die Menge der Extensionsklassen $\mathrm{Ext}^1(A, B)$ zu einer abelschen Gruppe macht.
- Stellen Sie heraus, daß $\mathrm{Ext}^1(A, B) = 0$ für A frei oder B divisibel.

5. Die Randabbildung von Gjilsha Neziri am 04.05.
Referenz: [8], Seite 167–170.

- Definieren Sie die Randabbildung $\mathrm{Hom}(X, C) \to \mathrm{Ext}^1(X, A)$.
- Zeigen Sie die Exaktheit der resultierenden Sequenz.
- Folgern Sie, daß $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/(m, n)\mathbb{Z}$.

6. Injektive Moduln von Joscha Kürten am 11.05.
Referenz: [2], Seite 618–623.

- Diskutieren Sie den Begriff des injektiven R-Moduls,
- Zeigen Sie, daß es genügend viele injektive R-Moduln gibt.

7. Projektive Moduln von Christian Hoppner am 18.05.
Referenz: [2], Seite 615–617.

- Diskutieren Sie den Begriff des projektiven R-Moduls.
- Beweisen Sie die Charakterisierung von Projektivität durch Lokalisierung.

8. Komplexe und Homologie von Anton Fröhlich und Sabine Schneider am 01.06.
Referenz: [5], Seite 27–31.

- Führen Sie den Begriff des Komplexes ein.
- Zeigen Sie, daß kurze exakte Sequenzen von Komplexen zu langen exakten Sequenzen von Homologiegruppen führen.

9. Abgeleitete Extensionsgruppen $\mathbf{Ext^n_R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ von Illya Gendler am 08.06.
Referenz: [5], Seite 33–37.

- Geben Sie die Definition von $\mathrm{Ext}^n_R(A, B)$ mit projektiven bzw. injektiven Auflösungen an.
- Verifizieren Sie, daß diese Definition bis auf kanonischen Isomorphismus nicht von der Wahl der Auflösung abhängt.

10. Die lange exakte Sequenz von Konstantinos Georgiadis am 22.06.
Referenz: [5], Seite 39–43.

- Erläutern Sie, wie die beiden langen exakten Sequenzen von Ext-Gruppen zu kurzen exakten Sequenzen von R-Moduln entstehen.

11. Abgeleitete Torsionsgruppen und universelles Koeffiziententheorem von Sascha Novakovic am 29.06.
Referenz: [4], III.2 und III.5.

- Geben Sie die Definitionen der Gruppen $\mathrm{Tor}^n_R(A, B)$ an.
- Diskutieren und beweisen Sie das universelle Koeffiziententheorem.
- Rechnen Sie ein Beispiel für das universelle Koeffiziententheorem durch.

12. Abelsche Kategorien und universelle δ-Funktoren von Philipp Gross am 06.07.
Referenz: [9], 2.1-2.5.

- Diskutieren Sie den Begriff der abelschen Kategorie.
- Führen Sie δ-Funktoren ein und zeigen Sie, wie man universelle δ-Funktoren definiert.
- Geben Sie Beispiele.

Literatur

[1] H. Cartan, S. Eilenberg: Homological algebra. Princeton University Press, Princeton, 1956.

[2] D. Eisenbud: Commutative algebra. Grad. Texts Math. 150. Springer-Verlag, New York, 1995.

[3] A. Grothendieck: Sur quelques points d'algèbre homologique. Tohoku Math. J. 9 (1957), 119–221.

[4] S.-T. Hu: Introduction to homological algebra. Holden-Day, San Francisco, 1968.

[5] J. Jans: Rings and homology. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.

[6] I. Kaplansky: Infinite abelian groups. University of Michigan Press, Ann Arbor, 1954.

[7] S. Lang: Algebra. Second edition. Addison–Wesley, Reading, 1984.

[8] B. Mitchell: Theory of categories. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, New York-London, 1965.

[9] C. Weibel: An introduction to homological algebra. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 38. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

Weiterer möglicher Termin ist der 13.07.2006