Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 04/05
29.1.2005

Klausur Lineare Algebra I

Bearbeitungszeit: 150 Minuten

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Unterschrift:

Studienfach:

Studienziel:

Semesterzahl:

Legen Sie Ihren Studenten- und Personalausweis sichtbar am Arbeitsplatz aus.
Schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen.
Begründen Sie Ihre Antworten.
Bei jeder Aufgabe können Sie 5 Punkte erreichen.

1	2	3	4	5	6	7	$\sum$

Klausureinsicht: Donnerstag, der 3.2. von 16-17 Uhr im Seminarraum 25.22.03.73.

Aufgabe 1. Sei K ein Körper, $f : V \to W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen, und $x_1, \ldots, x_n \in V$ Vektoren. Angenommen, die Bilder $y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$ in W sind linear unabhängig. Zeigen Sie, daß auch $x_1, \ldots, x_n \in V$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 2. Bringen Sie die komplexe 3×4-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} i & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1-6i & -1 & 5 \\ 1+i & 2+i & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3,4}(\mathbb{C})$$

auf Zeilenstufenform und bestimmen Sie ihren Rang.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper, und $V \subset K[t]$ der Untervektorraum aller Polynome p vom Grad $\deg(p) \leqslant 3$. Wir definieren eine lineare Abbildung

$$f : V \longrightarrow V, \quad p(t) \longmapsto p(t+1).$$

Wählen Sie eine Basis $p_1, \ldots, p_4 \in V$, bestimmen sie die Matrix $A \in \mathrm{Mat}_4(K)$ von f bezüglich dieser Basis, und berechnen sie das charakteristische Polynom χ_f.

Aufgabe 4. Seien $x, y \in K$ zwei Elemente eines Körpers, und $n \geq 1$ eine ganze Zahl. Wir definieren eine $2n \times 2n$-Matrix $A_n = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{2n}(K)$ durch

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} x & \text{falls } i = j, \\ y & \text{falls } i = 1 + 2n - j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit anderen Worten: x steht auf der Diagonalen, und y auf der Antidiagonalen. Zeigen Sie durch Induktion, daß $\det(A_n) = (x^2 - y^2)^n$ gilt.

Aufgabe 5. Sei V ein K-Vektorraum, und $U, U' \subset V$ zwei Untervektorräume. Zeigen Sie, daß die Abbildung $f : U \oplus U' \to V$, $(x, x') \mapsto x + x'$ genau dann injektiv ist, wenn $U \cap U' = 0$ gilt.

Aufgabe 6. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die reelle 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$$

trigonalisierbar bzw. diagonalisierbar? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 7. Für welche Primzahlen $p > 0$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & 12 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{F}_p)$$

nilpotent? Begründen Sie ihre Antwort.