Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 02/03

Klausur zur Algebra I

8.2.2003

Aufgabe 1. Bestimme bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 1960 und deren invariante Faktoren $d_1 | d_2 | \ldots | d_r$.

Aufgabe 2. Zeige, daß der Ring $\mathbb{F}_7[T]/(T^3 + 5T^2 + 4T + 4)$ isomorph zu $\mathbb{F}_7 \times \mathbb{F}_{49}$ ist.

Aufgabe 3. Sei $p > 0$ eine Primzahl und $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ die Menge aller invertierbaren Matrizen der Form $A = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right)$. Zeigen sie, daß G eine Untergruppe ist, und beweisen sie dann, daß G auflösbar ist.

Aufgabe 4. Sei $n \geq 0$ eine ungerade Zahl. Zeige, daß es ein natürliche Zahl $m \geq 1$ gibt so, daß die Gruppe $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ eine Untergruppe enthält, die zyklisch von Ordnung n ist.

Aufgabe 5. Sei $n \geq 3$ eine ungerade ganze Zahl. Beweise, daß die Kreisteilungspolynome der Gleichung $\Phi_n(-T) = \Phi_{2n}(T)$ genügen.

Aufgabe 6. Sei $\zeta \in \overline{\mathbb{Q}}$ eine primitive 12-te Einheitswurzel. Zeige, daß $a = \zeta^5 + \zeta^7 \in \mathbb{Q}(\zeta)$ einen Zwischenkörper vom Grad $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = 2$ erzeugt.

Aufgabe 7. Sei $n = p_1 \ldots p_r$ das Produkt von $r \geq 2$ verschiedenen Primzahlen, und $K \subset L$ eine galoische Körpererweiterung vom Grad $[L : K] = n$. Zeige, daß es mindestens $r+2$ Zwischenkörper $K \subset E \subset L$ gibt.

Aufgabe 8. Gib eine endliche Körpererweiterung $K \subset L$ an, die nicht galoisch ist, und begründe.

Pro Aufgabe können 4 Punkte erreicht werden. Die Klausur gilt als bestanden falls 50% = 16 Punkte erreicht werden.