Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 02/03

Übungen zur Algebra I

Blatt 1

Aufgabe 1. Sei $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und $A = R[T]/(T^2)$. Bestimme die Anzahl der Elemente im Ring A und liste alle Einheiten $a \in A$ auf.

Aufgabe 2. Gebe das Nilradikal $\mathrm{Rad}(R) = \{a \in R \mid a^n = 0 \text{ für ein } n \geq 0\}$ der folgenden drei Ringe an:

$$R = \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}, \qquad R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \qquad R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\,[T].$$

Aufgabe 3. Sei $A = R[T]$ die Polynomalgebra über einem Ring $R \neq 0$. Für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ definieren wir $S_n = \{\sum \lambda_i T^i \in A \mid \lambda_n = 0\}$. Für welche n ist die Teilmenge $S_n \subset A$ ein Unterring? Für welche ein Ideal?

Aufgabe 4. Sein $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Ist die Abbildung $\mathrm{Fr} : R \to R$, $x \mapsto x^p$ auf dem Ring $R = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ein Ringhomomorphismus?

Abgabe: Bis Freitag der 25.10. um 11:15 Uhr in den Kästen.

Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 02/03

Übungen zur Algebra I

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei K ein Körper, und $R \subset K[T]$ der Unterring aller Polynome $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i T^i$ mit $\lambda_1 = 0$. Zeige, daß die Elemente $T^2, T^3 \in R$ irreduzibel aber nicht prim sind.

Aufgabe 2. Sei $R \neq 0$ ein Ring mit $x^3 = x$ für alle $x \in R$. Zeige, daß die Charakteristik $\mathrm{Char}(R)$ so eines Rings entweder 2, 3, oder 6 ist, und folgere mit dem Chinesischen Restsatz, daß R isomorph zu $R/2R \times R/3R$ ist.

Aufgabe 3. Berechnen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von $3 + 8i$ und $12 + i$ im Ring der ganzen Gaußschen Zahlen $\mathbb{Z}[i] = \{m + ni \in \mathbb{C} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 4. Wir definieren auf der Ring $R = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ zwei neue Verknüpfungen $\oplus$, $\odot$ vermöge

$$(x_0, x_1) \oplus (y_0, y_1) = (x_0 + y_0, x_1 + y_1 - x_0 y_0^2 - x_0^2 y_0),$$
$$(x_0, x_1) \odot (y_0, y_1) = (x_0 y_0, x_0^3 y_1 + x_1 y_0^3).$$

Verifiziere, daß R bezüglich $\oplus, \odot$ ein Ring ist und zeige, daß dieser neue Ring isomorph zu $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 31.10. um 16:00 Uhr in den Kästen.

Übungen zur Algebra I

Blatt 3

Aufgabe 1. Zerlege das Polynom $f(T) = T^4 - T^2 - 2$ in irreduzible Faktoren, und zwar jeweils über den Körpern $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, sowie $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2. Sei $f(T) = \sum_{i=0}^{2n+1} a_i T^i$ ein primitives Polynom vom Grad $2n+1$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$, und $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl mit

$$p^3 \nmid a_0, \quad p^2 \mid a_i \text{ für } 0 \leqslant i \leqslant n, \quad p \mid a_i \text{ für } n+1 \leqslant i \leqslant 2n, \quad p \nmid a_{2n+1}.$$

Zeige, daß $f \in \mathbb{Z}[T]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring. (i) Beweise, daß ein Polynom $f(T) = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i$ in $R[T]$ eine Einheit ist, wenn $a_0 \in R^\times$ und $a_1, \ldots, a_n \in \operatorname{Rad}(R)$. (ii) Beweise, daß eine formale Potenzreihe $f(T) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i$ im Ring der formalen Potenzreihen $R[[T]]$ eine Einheit ist genau dann, wenn $a_0 \in R^\times$.

Aufgabe 4. Sei R ein Integritätsring, der euklidisch bezüglich einer Abbildung $\delta : R \to \mathbb{N}$ ist. Für eine formale Laurentreihe $f(T) = \sum_{i=n}^{\infty} a_i T^i$, $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$\varphi(f) = \begin{cases} \delta(a_n) & \text{falls } a_n \neq 0, \\ 0 & \text{falls } f = 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie, daß der Ring der formalen Laurentreihen $R((T))$ euklidisch bezüglich der Abbildung $\varphi : R((T)) \to \mathbb{N}$ ist.

Abgabe: Bis Freitag der 8.11. um 11:15 Uhr in den Kästen.

Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 02/03

Übungen zur Algebra I

Blatt 4

Aufgabe 1. Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle kommutativen Gruppen mit genau 7500 Elementen, und geben Sie deren invariante Faktoren an.

Aufgabe 2. Sei R ein Hauptidealring und $a, b \in R$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$. Seien M, N zwei R-Moduln mit $M_a = M$ und $N_b = N$. Zeige, daß die Nullabbildung $x \mapsto 0$ der einzige Homomorphismus $f : M \to N$ ist. Zur Erinnerung: $M_a = \{x \in M \mid a^n x = 0 \text{ für ein } n \geq 0\}$.

Aufgabe 3. Sei R ein Hauptidealring, und $P \subset R$ ein Representantensystem von Primelementen. Beweise, daß $T = \bigoplus_{p \in P} R/pR$ der Torsionsuntermodul des R-Moduls $M = \prod_{p \in P} R/pR$ ist.

Aufgabe 4. Sei R ein Hauptidealring, $p \in R$ ein Primelement, und M ein p-primärer R-Modul. Für jede ganze Zahl $n \geq 0$ definiert man die *n-te Ulmsche Invariante* $u_n(M) \geq 0$ als Dimension des R/pR-Vektorraumes

$$(M(p) \cap p^n M)/(M(p) \cap p^{n+1} M).$$

Berechne die Ulmschen Invarianten $u_n(M)$ für den R-Modul $M = R/p^3 R$. Zur Erinnerung: $M(p) = \{x \in M \mid px = 0\}$.

Abgabe: Bis Freitag der 15.11. um 11:15 Uhr in den Kästen.

Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 02/03

Übungen zur Algebra I

Blatt 5

Aufgabe 1. Beweise, daß $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ nicht isomorph zu einer direkten Summe von endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Moduln sind. (Tip: Betrachte die Lösbarkeit der Gleichungen $nx = y$ mit $n \in \mathbb{Z}$, $y \in M$ in den zur Diskussion stehenden Moduln M.)

Aufgabe 2. Sei $Q \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ die von den beiden Matrizen $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ erzeugte Untergruppe, wobei $i = \sqrt{-1}$. Zeige, daß Q eine Gruppe der Ordnung acht ist, und bestimme die Elemente $x \in Q$ von Ordnung zwei und vier.

Aufgabe 3. Sei D eine endliche nichtkommutative Gruppe, die von zwei Elementen $a, b \in D$ mit $a^2 = b^2 = 1$ erzeugt wird. Zeige, daß die Ordnung von D eine gerade Zahl ist.

Aufgabe 4. Seien N, H zwei Gruppen, und $f : H \to \mathrm{Aut}(N)$, $x \mapsto f_x$ ein Gruppenhomomorphismus. Wir definieren auf der Menge $G = N \times H$ eine Verknüpfung vermöge der Formel

$$(a, x) \cdot (b, y) = (af_x(b), xy), \qquad a, b \in N,\ x, y \in H.$$

Beweise, daß dies eine Gruppenstruktur auf G definiert. Zeigen Sie weiterhin, daß die Abbildung $i : N \to G$, $a \mapsto (a, 1)$ ein Homomorphismus ist, daß die Untergruppe $i(N) \subset G$ normal ist, und daß $G/i(N)$ isomorph zu H ist.

Abgabe: Bis Freitag der 22.11. um 11:15 Uhr in den Kästen.

Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 02/03

Übungen zur Algebra I

Blatt 6

Aufgabe 1. (i) Zeige, daß eine einfache Gruppe von Ordnung 60 genau sechs Untergruppen von Ordnung 5 enthält. (ii) Beweise, daß eine Gruppe von Ordnung 30 nicht einfach ist. (Zur Erinnerung: Eine Gruppe G heißt *einfach* falls sie keinen Normalteiler $N \neq G, \{1\}$ enthält.)

Aufgabe 2. Zeige, daß die alternierende Gruppe A_5 von den drei Permutationen $(123), (234), (245)$ erzeugt wird.

Aufgabe 3. Sei p eine Primzahl. Finde eine p-Sylow-Unterpruppe $P \subset G$ in der symmetrischen Gruppe $G = S_{2p-1}$ und der allgemeinen linearen Gruppe $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. (Tip: Machen Sie sich klar, daß P von Ordung p ist.)

Aufgabe 4. Sei G eine endliche Gruppe, $N \subset G$ ein Normalteiler, p eine Primzahl, und $P \subset G$ eine p-Sylow-Untergruppe. Beweise, daß $P \cap N \subset N$ und $PN/N \subset G/N$ p-Sylow-Untergruppen sind.

Abgabe: Freitag der 29.11. um 11:15 Uhr in den Kästen.

Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 02/03

Übungen zur Algebra I

Blatt 7

Aufgabe 1. Bestimme die Grade der Körpererweiterungen $\mathbb{Q} \subset L_i$ für die Körper $L_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[7]{5}), L_2 = \mathbb{Q}(\sqrt[11]{5})$, sowie $L_3 = \mathbb{Q}(\sqrt[7]{5}, \sqrt[11]{5})$.

Aufgabe 2. Berechnen Sie das Minimalpolynom von $\sqrt[4]{3} + \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ über den Körpern $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ und $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Aufgabe 3. Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung. Beweisen Sie, daß $K \subset L$ genau dann algebraisch ist, wenn jeder Unterring $A \subset L$ mit $K \subset A$ ein Unterkörper ist.

Aufgabe 4. Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung, $a \in L, a \neq 0$ ein algebraisches Element, und $f(T) = T^n + \lambda_{n-1}T^{n-1} + \ldots + \lambda_0 \in K[T]$ sein Minimalpolynom. Drücken Sie die Koeffizienten μ_i der Entwicklung $a^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i a^i$ bezüglich der K–Basis $a^0, a^1, \ldots, a^{n-1} \in K(a)$ durch die Koeffizienten λ_i des Minimalpolynoms $f(T)$ aus.

Abgabe: Bis Freitag der 06.12.2002 um 11:15 Uhr in den Kästen.

Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 02/03

Übungen zur Algebra I

Blatt 8

Aufgabe 1. Seien $m, n > 0$ ganze Zahlen, so dass m keine n–te Potenz einer ganzen Zahl ist. Zeige, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[n]{m})$ genau dann normal ist, wenn n gerade und m eine $\frac{n}{2}$–te Potenz einer ganzen Zahl ist.

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{F}_2 \subset \overline{\mathbb{F}}_2$ ein algebraischer Abschluš des Körpers mit zwei Elementen $\mathbb{F}_2$, und $a \in \overline{\mathbb{F}}_2$ eine Wurzel des Polynoms $f(T) = T^3 + T^2 + 1$. Zeige, dass der Körper $\mathbb{F}_2(a)$ genau acht Elemente enthält und der Zerfällungsskörper von $f \in \mathbb{F}_2[T]$ ist.

Aufgabe 3. Sei K Körper, $f \in K[T]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ und $K \subset L$ ein Zerfällungskörper von f. Beweise durch Induktion, dass $[L : K]$ ein Teiler von $n!$ ist.

Aufgabe 4. Sei $K \subset E$ eine Körpererweiterung und $K \subset L_1, L_2 \subset E$ zwei Zwischenkörper, die normal über K sind. Beweisen Sie, dass auch $K(L_1 \cup L_2)$ normal über K ist.

Abgabe: Bis Freitag der 13.12.2002 um 11:15 Uhr in den Kästen.

Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 02/03

Übungen zur Algebra I

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$, dessen Frobenius–Homomorphismus $\sigma : K \to K, x \mapsto x^p$ bijektiv ist. Zeige, dass jedes irreduzible Polynom $f \in K[T], f \neq 0$ separabel ist.

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{Q} \subset L$ eine normale Körpererweiterung. Konstruiere induktiv eine Folge $\mathbb{Q} = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ von Unterkörpern in L so, dass $L = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$, und dass jede Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset E_i$ normal und **endlich** ist. (Tip: Betrachte in $\overline{\mathbb{Q}}$ konjugierte Elemente.)

Aufgabe 3. Sei $K \subset L$ eine normale Körpererweiterung, $a, b \in L$ zwei Elemente, und $f, g \in K[T]$ die jeweiligen Minimalpolynome. Beweise, dass $f = g$ genau dann gilt, wenn es einen K–Homomorphismus $\sigma : L \to L$ mit $\sigma(a) = b$ gibt.

Aufgabe 4. (i) Sei K ein Körper, und $f \in K[T]$ mit $f \neq 0$. Zeige, dass f genau dann separabel ist, wenn es $g, h \in K[T]$ mit $fg + f'h = 1$ gibt.
(ii) Sei $f \in \mathbb{Z}[T], f \neq 0$ ein Polynom, das als Element in $\mathbb{Q}[T]$ separabel ist. Beweise, dass es nur endlich viele Primzahlen $p > 0$ gibt, so dass die Restklasse $\overline{f} \in \mathbb{F}_p[T]$ von f nicht separabel ist.

Abgabe: Bis Freitag der 20.12.2002 um 11:15 Uhr in den Kästen.

Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 02/03

Übungen zur Algebra I

Blatt 10

Aufgabe 1. (i) Zeige, dass $f(T) = T^2 - T + 1$ irreduzibel über $\mathbb{F}_5$ ist, und dass $\mathbb{F}_{25} = \mathbb{F}_5[T]/(f)$ gilt.
(ii) Sei $a \in \mathbb{F}_{25}$ die Restklasse von $T \in \mathbb{F}_5[T]$ modulo f. Bestimme alle $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_5$, f"ur die $\lambda + \mu a \in \mathbb{F}_{25}$ die multiplikative Gruppe $\mathbb{F}_{25}^\times$ erzeugt.

Aufgabe 2. (i) Bestimme alle normierten irreduziblen quadratischen Polynome $f_i \in \mathbb{F}_3[T]$ und bilde deren Produkt.
(ii) Zeige, dass es zu einer festen Primzahl p genau $(p^2 - p)/2$ normierte irreduzible quadratische Polynome $f_i \in \mathbb{F}_p[T]$ gibt, und dass deren Produkt gerade

$$\frac{T^{p^2} - T}{T^p - T} = 1 + T^{p-1} + T^{2(p-1)} + \ldots + T^{p(p-1)}$$

ergibt.

Aufgabe 3. Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Beweise, dass die multiplikative Gruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ genau dann zyklisch ist, wenn n von der Form $1, 2, 4, p^e$ oder $2p^e$ ist, wobei p eine ungerade Primzahl und $e \geq 1$ ist.

Aufgabe 4. Sei $q = p^n$ eine ungerade Primzahl–Potenz. Für $x \in \mathbb{F}_q^\times$ sei $\varepsilon(x) = x^{(q-1)/2}$. Zeige, dass $\varepsilon : \mathbb{F}_q^\times \to \mathbb{F}_q^\times$ ein Homomorphismus von multiplikativen Gruppen ist, und dass $\text{bild}(\varepsilon) = \{\pm 1\}$ und $\text{Kern}(\varepsilon) = \{y^2 | y \in \mathbb{F}_q^\times\}$ gilt.

Abgabe: Bis Freitag der 10.01.2003 um 11:15 Uhr in den Kästen.

Frohe Weihnachten und guten Rutsch!

Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 02/03

Übungen zur Algebra I

Blatt 11

Aufgabe 1. (i) Sei $\mathbb{Q} \subset L_1$ der Zerfällungskörper von $f_1(T) = T^4 - T^2 - 2$. Zeige, dass $\mathrm{Gal}(L_1/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist.
(ii) Sei $\mathbb{Q} \subset L_2$ der Zerfällungskörper von $f_2(T) = T^4 + 1$. Zeige, dass $\mathrm{Gal}(L_2/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist.
(Tip: Skizziere die Wurzeln von f in $\mathbb{C}$, zeige $[L_i, \mathbb{Q}] = 4$, und betrachte die Wirkung von $\mathrm{Gal}(L_i/\mathbb{Q})$ auf den Wurzeln).

Aufgabe 2. Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$, und $x \in K$ ein Element, für das $f(T) = T^p - T + x$ keine Wurzel in K besitzt. Sei $K \subset L$ der Zerfällungskörper von f. Beweise, dass die Galois–Gruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 3. Sei $K \subset L$ eine endliche Galois–Erweiterung, und p^r eine Primzahlpotenz. Wir nehmen an, dass p^r ein Teiler von $[L : K]$ ist. Beweise, dass es einen Zwischenkörper $K \subset E \subset L$ gibt mit $[L : E] = p^r$. (Tip: Sylow–Sätze, Hauptsatz der Galois–Theorie.)

Aufgabe 4. Sei $K \subset L$ eine endliche Galois–Erweiterung, und $H_1, H_2 \subset \mathrm{Gal}(L/K)$ zwei Untergruppen, und $E_1 = L^{H_1}, E_2 = L^{H_2}$ deren Fixkörper. Sei $E = K(E_1 \cup E_2)$ der von $E_1 \cup E_2$ erzeugte Zwischenkörper und $H = H_1 \cap H_2$. Beweise, dass $E = L^H$ gilt.

Abgabe: Bis Freitag der 17.01.2003 um 11:15 Uhr in den Kästen.

Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 02/03

Übungen zur Algebra I

Blatt 12

Aufgabe 1. Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und $n = p_1^{r_1} \ldots p_s^{r_s}$ seine Primfaktorzerlegung. Schreibe $l = p_1 \ldots p_s$ und $m = n/l$. Man beweise für die Kreisteilungspolynome $\Phi_n \in \mathbb{Z}[T]$ die Formel $\Phi_n(T) = \Phi_l(T^m)$ und berechne Φ_{432}.

Aufgabe 2. Sei $L = \mathbb{Q}(e^{2\pi i/56})$. Wieviele Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subset E \subset L$ hat die Erweiterung $\mathbb{Q} \subset L$?

Aufgabe 3. Sei $K \subset L$ eine endliche Galois–Erweiterung. Ein Zwischenkörper $K \subset E \subset L$ werde als **abelsch** bezeichnet, falls $K \subset E$ eine Galois–Erweiterung ist, dessen Galois–Gruppe $\mathrm{Gal}(E/K)$ abelsch ist. Beweise, daß es einen abelschen Zwischenkörper E gibt, der alle anderen abelschen Zwischenkörper enthält. (Tipp: Kommutator–Untergruppe.)

Aufgabe 4. Sei $p > 0$ eine Primzahl, $n \geq 1$ eine natürliche Zahl prim zu p, und $\zeta \in \mu_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$ eine primitive n–te Einheitswurzel. Sei $\overline{\Phi}_n \in \mathbb{F}_p[T]$ das Polynom, welches durch Restklassenbildung der Koeffizienten aus dem n–ten Kreisteilungspolynom $\Phi_n \in \mathbb{Z}[T]$ hervorgeht. Beweise die Gleichheit

$$\overline{\Phi}_n(T) = \prod_{r \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} (T - \zeta^r)$$

im Ring $\mathbb{F}_p[T]$. (Tipp: Benutze die Formel $T^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(T)$ für Induktion.)

Abgabe: Bis Freitag der 24.01.2003 um 11:15 Uhr in den Kästen.

Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 02/03

Übungen zur Algebra I

Blatt 13

Aufgabe 1. Sei $p > 0$ eine ungerade Primzahl, $\zeta \in \mu_p(\overline{\mathbb{Q}})$ eine primitive p–te Einheitswurzel, und $L = \mathbb{Q}(\zeta)$. Berechnen Sie die Normen $N_{L/\mathbb{Q}}(1+\zeta) \in \mathbb{Q}$ und $N_{L/\mathbb{Q}}(\zeta + \zeta^{-1}) \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 2. Sei $\mu_\infty(\mathbb{C}) = \bigcup_{n \geq 1} \mu_n(\mathbb{C})$ die Gruppe aller Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$. Beweise, dass die Gruppen $\mu_\infty(\mathbb{C})$ und $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ isomorph sind.

Aufgabe 3. Sei $p > 0$ eine Primzahl, $K \subset L$ eine zyklische Körpererweiterung vom Grad $[L : K] = p^n$, und $K \subset E \subset L$ der Zwischenkörper mit $[L : E] = p$. Zeige, dass $K(a) = L$ gilt für alle $a \in L$ mit $a \notin E$.

Aufgabe 4. Seien $n_1, n_2 \geq 1$ zwei teilerfremde ganze Zahlen, $n = n_1 n_2$ deren Produkt, und $\zeta \in \mu_n(\overline{\mathbb{Q}})$ eine primitive n–te Einheitswurzel. Zeige, dass $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}(\zeta^{n_1}))$ isomorph zu $(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z})^\times$ ist.

Abgabe: Bis Freitag der 31.01.2003 um 11:15 Uhr in den Kästen.