

About the Probabilistic Proof of the Atiyah-Singer-Index Theorem

KAI KÖHLER

Abstract *We give a new version of Bismut's proof of the Atiyah- Singer index theorem. Our method is close to Leandres, but more intrinsic. We don't use local coordinates and the computation of the derivation of the stochastic parallel transport is simplified. The paper contains an elementary introduction to stochastic analysis.*

AMS 1980 Subject Classification: 58G10, 58G32.

**Über den
stochastischen Beweis des
Atiyah-Singer-Indextheoremes**

KAI KÖHLER

Diplomarbeit an der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Mai 1990
Bonn

1. Einleitung

In dieser Arbeit wird ein Beweis des lokalen Atiyah-Singer-Indextheoremes mit Hilfe von Methoden aus der Stochastischen Differentialgeometrie erklärt. Im wesentlichen stammt der dargestellte Beweis von [Bismut(2)] und [Leandre]; einige Teile wurden leicht verändert und mit differentialgeometrischen Begriffen geschlossener und ohne lokale Koordinaten formuliert.

Der lokale Indexsatz wurde zuerst von [Patodi] für den Satz von Gauß- Bonnet-Chern und später für den Satz von Riemann-Roch bewiesen. [Atiyah- Bott-Patodi] konnten mit Hilfe der Invariantentheorie den lokalen Hirzebruch-Signatursatz mit Koeffizienten in einem Hilfsbündel zeigen. Mit einem K-theoretischen Argument folgerten sie daraus den Indexsatz für eine große Klasse von elliptischen Komplexen. In [Gilkey] findet man eine ausführliche Beschreibung dieses Beweises. Mit einer stochastisch bewiesenen Ungleichung konnte [Getzler] einen eleganten Beweis konstruieren. Schließlich verwendete [Bismut(2)] stochastische Prozesse, um den Wärmeleitungskern darzustellen, und gab mit deren Hilfe eine asymptotische Entwicklung, die den Indexsatz lieferte. [Ikeda-Watanaba(2)] verwendeten Taylorreihen im Malliavin-Kalkül, um einen einfachen Beweis des Hirzebruch-Signatursatzes zu erhalten. Mit derselben Methode bewiesen [Shigekawa-Ueki] den Satz von Riemann-Roch. [Berline-Vergne] veröffentlichten einen gruppentheoretischen Beweis des Satzes von Atiyah- Singer. Bismut's Beweis wurde von [Azencott] mit einer asymptotischen Entwicklung der Brownschen Brücke vereinfacht. Später verwendete [Leandre] den Malliavin-Kalkül, um einfachere Entwicklungen ohne Konditionierung der Prozesse zu erhalten. Eine umfangreichere Darstellung veröffentlichte er in [Leandre(2)]. [Hsu] vereinfachte Azencott's Beweis mit einer Taylorentwicklung der auftretenden Prozesse; er benötigt weder Zeitumparametrisierung noch eine stochastische Trennung der Prozesse auf dem Spinor- und dem Hilfsbündel. Für einige neuere Ansätze siehe [Bismut(3)].

Diese Arbeit entstand als Diplomarbeit des Fachgebietes Differentialgeometrie (bei Professor H. Karcher). Deshalb werden differentialgeometrische Grundlagen gar nicht oder nur sehr kurz erklärt. Einige Begriffe zu Zusammenhängen auf Prinzipalbündeln findet man in [Kobayashi-Nomizu] oder [Bishop-Crittenden].

Eine umfangreiche Darstellung der stochastischen Grundlagen geben [Ikeda- Watanabe] und [Karatzas-Shreve], eine Einführung [Chung-Williams]. Sie werden aber auch in den ersten Kapiteln kurz erläutert: Zunächst werden Martingale und der Itô-Kalkül erklärt. Weiter werden Brownsche Bewegung und stochastische Analysis auf Mannigfaltigkeiten behandelt (weiterführende Literatur zu diesem Thema ist etwa [Bismut]). Danach wird die differentialgeometrische Formulierung der Charakteristischen Klassen und das Spinorbündel erläutert. Dann folgt der stochastische Beweis des Indexsatzes:

Der Wärmeleitungskern für das Quadrat des Dirac-Operators wird mit der Brownschen Bewegung und einigen Hilfprozessen dargestellt. Diese Hilfprozesse, etwa die Parallelverschiebung längs des Brownschen Pfades, werden durch stochastische Differentialgleichungen definiert. Nach einer Idee von Leandre wird hier nicht, wie sonst üblich,

mit einer Brownschen Brücke gearbeitet. Stattdessen wird der Kern mit Hilfe von Regularitätsaussagen aus dem Malliavin-Kalkül als bedingte Erwartung eines einfachen Prozesses dargestellt. In dieser Arbeit sind diese Prozesse noch einfacher und natürlicher als bei Leandre gewählt.

Dank einer Selbstähnlichkeit der Brownschen Bewegung kann man die zeitabhängige Verteilung der Prozesse über eine Parametrisierung der Differentialgleichungen simulieren. Dann differenziert man nach diesem Parameter, um eine asymptotische Entwicklung nach der Zeit zu erhalten. Bei der Integration der entstehenden Gleichungen hilft eine Formel von Lévy.

Durch Verwendung von Koeffizienten in einem Bündel ξ wird die Berechnung etwas unübersichtlicher. Die Prozesse müssen zunächst in Anteile für das Spinorbündel und das Koeffizientenbündel aufgespalten und später wieder zusammengeführt werden. Vielleicht erleichtert es das Verständnis, wenn man bei der ersten Lektüre alle durch das Bündel ξ entstehenden Prozesse und Probleme ignoriert oder sich ξ als triviales Bündel vorstellt.

Ich danke allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, insbesondere Dipl.-Math. Christian Bär und Dr. Hui Huang für ihre zahlreichen Hinweise und Erläuterungen und Bernhard Leeb für die intensive Zusammenarbeit beim Erlernen der stochastischen Begriffe. Ich danke auch Prof. H. Karcher und Prof. H. Föllmer für einige Verbesserungsvorschläge.

2. Grundlagen

2.1. Stochastische Prozesse

Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $I := \mathbf{N}_0$ oder \mathbf{R}_0^+ .

DEFINITION: Sei (E, \mathcal{E}) ein Meßraum. Ein (**E -wertiger, stochastischer**) **Prozeß** $X = (X_t)_{t \in I}$ ist eine Familie von meßbaren Abbildungen $X_t : \Omega \rightarrow E$. Für ein $\omega \in \Omega$ heißt die Abbildung $t \mapsto X_t(\omega)$ **Pfad**.

E wird immer ein metrischer Raum sein. Für die Kapitel zwei bis vier sei E ein euklidischer Vektorraum. Alle betrachteten Prozesse werden, ohne das speziell darauf hingewiesen wird, (pfadweise) rechtsstetig mit endlichen linksseitigen Limiten sein.

Ein Beispiel für einen Prozeß in diskreter Zeit (d.h. $I = \mathbf{N}_0$) ist etwa der Ausgang eines Spiels nach der n -ten Runde.

Das wichtigste Beispiel für einen Prozeß in stetiger Zeit ist die **Brownsche Bewegung** w . Ein reellwertiger stetiger Prozeß w (d.h. pfadweise stetig) ist eine Brownsche Bewegung, wenn

- i) $w_0 = 0$ P -f.s.,
- ii) für $t \geq s$ die Differenz $w_t - w_s$ $N(0, \sqrt{t-s})$ -verteilt ist und
- iii) für $t_0 \leq \dots \leq t_n$ die $w_{t_0}, w_{t_0} - w_{t_1}, \dots, w_{t_{n-1}} - w_{t_n}$ unabhängig sind.

Man kann mit einem Satz von Kolmogoroff zeigen, daß auf $\Omega := C(\mathbf{R}_0^+)$ mit der von den Borelschen Zylindermengen erzeugten σ -Algebra ein Maß P existiert, so daß die Abbildungen $\omega \mapsto \omega(t)$ eine Brownsche Bewegung werden (die Borelschen Zylindermengen haben die Form

$$\{\omega \mid (\omega_{t_1}, \dots, \omega_{t_n}) \in A\}$$

für Zeiten t_1, \dots, t_n und Lebesgue-meßbares $A \subset \mathbf{R}^n$).

DEFINITION: Eine **Filtrierung** des Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, \mathcal{F}, P) ist eine aufsteigende Folge $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ von σ -Unteralgebren von \mathcal{F} . Für $I = \mathbf{R}_0^+$ heißt die Filtrierung **rechtsstetig**, falls für alle $t \geq 0$

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}.$$

Die Filtrierung heißt **Standardfiltrierung**, wenn sie rechtsstetig ist und (\mathcal{F}_0) alle P -Nullmengen enthält. Ein Prozeß X heißt **an (\mathcal{F}_t) adaptiert**, wenn für alle t X_t \mathcal{F}_t -meßbar ist.

Die Filtrierung läßt I zu einer Zeitachse werden: Jede σ - Unteralgebra \mathcal{F}_t läßt sich als Informationsmenge interpretieren, nämlich die Kenntnis darüber, welche Ereignisse aus \mathcal{F}_t stattfinden, d.h. für welche $A \in \mathcal{F}_t$ bei Wahl eines $\omega \in \Omega$ $\omega \in A$ gilt.

Damit stellen die aufsteigenden σ -Algebren ein "Gedächtnis" dar. \mathcal{F}_t enthält die bis zum Zeitpunkt t bekannten Informationen, $[0, t[$ stellt dann die "Vergangenheit" und $]t, \infty[$ die "Zukunft" dar. Für einen adaptierten Prozeß enthält die Filtrierung alle Informationen über das Verhalten des Prozesses bis zur Gegenwart. Eine rechtsstetige Filtrierung erlaubt es, einen infinitesimalen Blick in die Zukunft zu werfen und z.B. vorherzusehen, ob ein im \mathbf{R}^n diffundierendes Teilchen direkt nach der Gegenwart in eine offene Menge eintreten wird oder nicht.

BEISPIEL: Die kleinste Filtrierung, bezüglich der ein Prozeß X adaptiert ist, ist

$$\mathcal{F}'_t := \sigma(X_s | s \leq t),$$

die kleinste rechtsstetige ist

$$\mathcal{F}_t := \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}.$$

Mit dem folgenden Begriff kann man das "Gedächtnis" \mathcal{F}_t auswerten und damit auf das Verhalten eines Prozesses Einfluß nehmen oder Informationen über den Prozeß sammeln.

DEFINITION: Eine **Stopzeit** ist eine Zufallsvariable $\tau : \Omega \rightarrow I \cup \{\infty\}$, so daß

$$\forall t \geq 0 : \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Man "weiß" also zum Zeitpunkt t , ob die Stopzeit in der Zukunft liegt oder schon vorüber ist.

BEISPIELE: i) Spielstrategien: Eine Strategie, die festlegt, nach welcher Gewinnfolge eine Serie von Spielen beendet werden soll, ist eine Stopzeit.

ii) Sei (\mathcal{F}_t) eine rechtsstetige Filtrierung, X ein stetiger adaptierter Prozeß, $A \subset E$ offen oder abgeschlossen. Dann ist die Eintrittszeit

$$\tau_A := \inf\{t | X_t \in A\}$$

von X in A (oder die Austrittszeit von X aus $E \setminus A$) eine Stopzeit, denn (Beweis für offenes A , für abgeschlossenes siehe [Karatzas-Shreve 1.2.7])

$$\{\tau_A \leq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{s \leq t + \frac{1}{n} \\ s \in \mathbf{Q}}} X_s^{-1}(A) \in \mathcal{F}_t.$$

2.2. Martingale

Einer der wichtigsten Begriffe in der Stochastischen Analysis ist der des Martingals. Anschaulich ist ein Martingal ein stochastischer Prozeß, dessen bestmögliche Vorhersage bei Kenntnis eines Anfangsstückes auf dem Zeitintervall von 0 bis s durch den Wert zum Zeitpunkt s gegeben ist.

Ein typisches Beispiel in diskreter Zeit ist etwa ein faires Spiel: Zu jedem Zeitpunkt wird eine (ideale) Münze geworfen und Kopf oder Zahl als $+1$ oder -1 gezählt. Die Summen der bisherigen Ergebnisse bilden dann ein Martingal; die beste Vorhersage der Summe etwa bis zum zehnten Spiel, die sich machen läßt, wenn die Münze erst fünfmal geworfen wurde, ist die Summe der ersten fünf Würfe.

Um dies mathematisch zu fassen, muß zunächst der Begriff "bestmögliche Vorhersage" präzisiert werden, nämlich folgendermaßen als bedingte Erwartung:

DEFINITION: Die **bedingte Erwartung** $X \mapsto E[X|\mathcal{A}] =: X_0$ für eine σ -Unteralgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ ist die Orthogonalprojektion $(\mathcal{F}\text{-mb.}, L^2) \rightarrow (\mathcal{A}\text{-mb.}, L^2)$.

BEMERKUNG: $E[\cdot|\mathcal{A}_0]$ ist mit der Beziehung

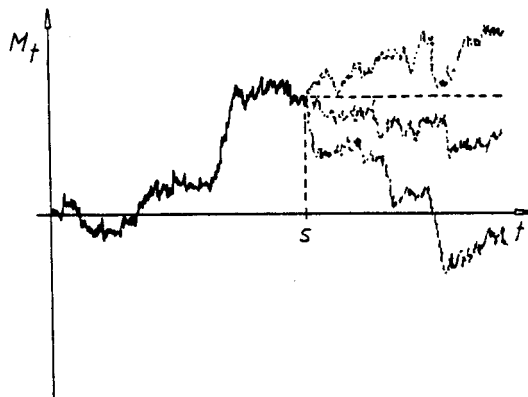
$$\forall Y_0 \mathcal{A}_0\text{-mb.}, \in L^1 : E[Y_0 X_0] = E[Y_0 X]$$

eindeutig nach L^1 fortsetzbar. Insbesondere gilt $E[X_0] = E[X]$.

Das heißt also, X_0 ist diejenige Zufallsvariable, die unter allen lediglich mit Kenntnis von \mathcal{A}_0 bestimmbaren X im L^2 -Sinne am nächsten liegt.

DEFINITION: Sei (\mathcal{F}_t) Standardfiltrierung. Ein adaptierter stochastischer Prozeß $(M_t)_{t \geq 0}$ (mit $t \in \mathbf{R}$ bzw. $t \in \mathbf{N}$) heißt **Martingal** (in stetiger bzw. diskreter Zeit): \iff

- i) $\forall t \geq 0 : M_t \in L^1$
- ii) $\forall t \geq s \geq 0 : E[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s \quad P\text{-f.s.}$



BEISPIELE: i) Faires Spiel (in diskreter Zeit): Sei $(Y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen aus L^1 mit Erwartungswert 0, dann ist

$$(M_n) := \left(\sum_{j=0}^n Y_j \right)$$

ein Martingal bezüglich der Filtrierung $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_j | j \leq n)$.

ii) Sei X eine Zufallsvariable aus L^1 , (\mathcal{F}_t) eine Filtrierung, dann ist

$$(M_t)_{t \in \mathbf{R}} := (E[X | \mathcal{F}_t])$$

ein Martingal in stetiger Zeit.

iii) Die n -dimensionale Brownsche Bewegung $w = (w^1, \dots, w^n)$, wobei die w^j paarweise unabhängige Brownsche Bewegungen sind, ist ein n -dimensionales Martingal, d.h. jede Komponente ist ein Martingal.

Allgemeiner definiert man

DEFINITION: $(X_t)_{t \geq 0}$ heißt **L^p -Martingal**: $\iff \forall t : X_t \in L^p$.

Zwei wichtige grundlegende Sätze für den Umgang mit Martingalen:

STOPPSATZ 2.1. Sei M ein Martingal und τ eine P -f.s. beschränkte Stoppzeit. Dann ist $(M_{\tau \wedge t})$ ein Martingal und

$$E[M_\tau | \mathcal{F}_t] = M_{\tau \wedge t} \quad P\text{-f.s.}$$

KONVERGENZSATZ 2.2. Sei M rechtsstetiges L^p -beschränktes Martingal (d.h., $\|M_t\|_p$ ist beschränkt in t). Dann existiert eine Zufallsvariable $M_\infty \in L^p$ mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_t = M_\infty \quad P\text{-f.s.}$$

Wenn $p > 1$ oder M gleichmäßig integabel ist, gilt sogar $M_t = E[M_\infty | \mathcal{F}_t]$ P -f.s.

Für die Konvergenz von Martingalen genügt also Beschränktheit.

3. Das Itô-Integral

3.1. Quadratische Variation

Für die Anwendungen in dieser Arbeit wird nur eine Teilmenge der Martingale benötigt werden, für die sich ein umfangreicher Kalkül entwickeln läßt. Sei zunächst

$$\mathcal{M}_2 := \{ \text{stetige } L^2 \text{-Martingale } M \text{ mit } M_0 = 0 \text{ } P\text{-f.s.} \}$$

Diese Menge von stochastischen Prozessen wird später noch ein wenig erweitert werden.

Sei nun $M \in \mathcal{M}_2$, X (\mathcal{F}_t)-adaptierter Prozeß. Dann kann ein Integral $\int_0^t X_s dM_s$ nicht mit dem Riemann-Stieltjes-Integral pfadweise erklärt werden, da M nicht von lokal beschränkter Variation ist, wenn es nicht konstant ist (s.u.). Man kann aber eine andere Art von Integral definieren (nicht-pfadweise), die viele nützliche Eigenschaften besitzt.

Dazu benötigt man folgende sehr wichtige Begriffe:

DEFINITION UND SATZ 3.1. Sei $M \in \mathcal{M}_2$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten stetigen nichtfallenden Prozeß $(\langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$ mit $\langle M \rangle_0 = 0$, so daß $M^2 - \langle M \rangle$ ein Martingal ist. $\langle M \rangle$ heißt die **Varianz** oder **quadratische Variation** von M .

Seien $M, N \in \mathcal{M}_2$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten stetigen Prozeß $(\langle M, N \rangle_t)_{t \geq 0}$ von beschränkter Variation mit $\langle M, N \rangle_0 = 0$, so daß $MN - \langle M, N \rangle$ ein Martingal ist, nämlich

$$\langle M, N \rangle = \frac{\langle M + N \rangle - \langle M - N \rangle}{4}.$$

$\langle M, N \rangle$ heißt die **Kovarianz** oder **Kreuzvariation** von M und N .

BEMERKUNG: Einige Eigenschaften der Variationen für $M, N, M_1, M_2 \in \mathcal{M}_2$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$:

- i) $\langle M, M \rangle = \langle M \rangle$,
- ii) $\langle M, N \rangle = \langle N, M \rangle$,
- iii) $\langle \alpha M_1 + \beta M_2, N \rangle = \alpha \langle M_1, N \rangle + \beta \langle M_2, N \rangle$,
- iv) $|\langle M, N \rangle|^2 \leq \langle M \rangle \langle N \rangle$,
- v) $\langle M \rangle = 0 \iff M = 0 \quad P\text{-f.s.}$

Letzteres gilt wegen $E[M_t^2] = E[\langle M \rangle_t]$.

Das folgende Lemma erklärt den Namen "quadratische Variation" und macht plausibel, warum die obige Begriffsbildung relativ natürlich und dem Begriff des Martingals genau angepaßt ist.

LEMMA 3.2. Sei $\Pi := (t_0, \dots, t_m)$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = t$ eine Zerlegung von $[0, t] \subset \mathbf{R}$, $\|\Pi\| := \max |t_{k+1} - t_k|$, $M, N \in \mathcal{M}_2$. Dann gilt

$$\lim_{\|\Pi\| \searrow 0} \sum (M_{t_{k+1}} - M_{t_k})(N_{t_{k+1}} - N_{t_k}) = \langle M, N \rangle_t \text{ in Wahrscheinlichkeit.}$$

Für einen adaptierten stetigen Prozeß (X_t) und $p \in \mathbf{R}$ heißt der Grenzwert (in Wahrscheinlichkeit)

$$V^p := \lim_{\|\Pi\| \searrow 0} \sum |M_{t_{k+1}} - M_{t_k}|^p$$

die p -te Variation von X , sofern er existiert.

Für Martingale $\in \mathcal{M}_2 \setminus \{0\}$ gilt

$$V^p = \begin{cases} 0 & \text{für } p > 2, \\ \infty & \text{für } 0 < p < 2. \end{cases}$$

Martingale sind also nicht von beschränkter Variation, aber von beschränkter quadratischer Variation. Diese Eigenschaft macht sie zu guten Hilfsmitteln bei der Untersuchung von Differentialoperatoren zweiter Ordnung.

Ein wichtiges Beispiel für Kreuzvariationen:

LEMMA 3.3. Ein n -dimensionales Martingal (M^1, \dots, M^n) , $M^k \in \mathcal{M}_2$ ist genau dann eine Brownsche Bewegung, wenn $\forall t \geq 0 : \langle M^j, M^k \rangle_t = \delta_{jk}t$. Insbesondere sind die Kreuzvariationen dann deterministisch.

Beweis: (Nur "⇒") Für $t > s$ gilt

$$\begin{aligned} E[(M_t^k)^2 - (M_s^k)^2 | \mathcal{F}_s] &= E[(M_t^k)^2 | \mathcal{F}_s] - 2E[M_t^k | \mathcal{F}_s]M_s^k + (M_s^k)^2 \\ &= E[(M_t^k - M_s^k)^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= E[(M_t^k - M_s^k)^2] \\ &= t - s. \end{aligned}$$

$((M_t^k)^2 - t)$ ist also ein Martingal.

Nun sind $M^j \pm M^k$ als Prozesse äquivalent zu $2M^k$, also folgt $\langle M^j, M^k \rangle = \frac{1}{4}(\langle M^j + M^k \rangle - \langle M^j - M^k \rangle) = 0$. \square

Der Raum \mathcal{M}_2 , der die Integratoren des zu definierenden Integralbegriffes enthält, wird nun zusammen mit dem Raum der Integranden mit einer Metrik versehen.

DEFINITION: Für $M, N \in \mathcal{M}_2$, $T \in \mathbf{R}$ sei

$$\|M\|_T^2 := E[M_T^2] = E[\langle M \rangle_T],$$

$$d(M, N) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|M - N\|_n \wedge 1}{2^n}.$$

Für (\mathcal{F}_t) -adaptierte Prozesse X, Y sei

$$(\|X\|_{2,T}^M)^2 := E\left[\int_0^T X^2 d\langle M \rangle\right],$$

$$d^M(X, Y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|X - Y\|_{2,n}^M \wedge 1}{2^n}.$$

Die Menge $\mathcal{L}_2(M)$ der Integranden besteht aus den stückweise stetigen (\mathcal{F}_t) -adaptierten Prozessen mit endlichen $\|X\|_{2,\cdot}^M$.

$x \wedge y$ bedeutet hier $\min(x, y)$. Das Integral in dieser Definition ist ein gewöhnliches Riemann-Stieltjes-Integral, da $\langle M \rangle$ von beschränkter Variation ist.

Wie üblich werden zwei Elemente $X, Y \in \mathcal{L}_2(M)$ identifiziert, wenn $d^M(X, Y) = 0$ ist, so daß d^M tatsächlich eine Metrik wird. Nach Standardsätzen aus der Funktionalanalysis ist $\mathcal{L}_2(M)$ vollständig.

Die Forderung "stückweise stetig" könnte durch weit schwächere stochastische Bedingungen ersetzt werden. Das wird aber für unsere Zwecke nicht nötig sein.

Für \mathcal{M}_2 zeigt man leicht, daß obige Definition tatsächlich eine Metrik ergibt. Aus dem Konvergenzsatz folgt, daß \mathcal{M}_2 damit ebenfalls ein vollständiger metrischer Raum wird.

Die beiden Räume sind also von den (monoton wachsenden) Halbnormenfamilien $(\|\cdot\|_n | n \in \mathbf{N})$ bzw. $(\|\cdot\|_{2,n}^M | n \in \mathbf{N})$ erzeugte Fréchet-Räume.

3.2. Konstruktion des Itô-Integrals

DEFINITION: \mathcal{L}_0 sei die Menge der stochastischen Prozesse X der Form

$$X_t = \begin{cases} f_0 & \text{für } t = 0, \\ f_k & \text{für } t_k < t \leq t_{k+1}, \end{cases}$$

mit $t_0 := 0$, $t_k \nearrow \infty$, f_k \mathcal{F}_{t_k} -mb. Zufallsvariable, $\sup \|f_k\|_{\infty} < \infty$. Dann sei

$$(X.M)_t := \int_0^t X \delta M := \sum_{k=0}^{\infty} f_k (M_{t \wedge t_{k+1}} - M_{t \wedge t_k})$$

das **Itô-Integral über $X \delta M$** .

BEMERKUNG: Viele Autoren verwenden dM anstelle von δM . Die Gründe für die hier gewählte Bezeichnung werden später klar werden. Man beachte, daß \mathcal{L}_0 von der Filtrierung (\mathcal{F}_t) abhängt.

Die Summe in dieser Definition ist nur formal unendlich.

LEMMA 3.4. *Es gilt für $M, N \in \mathcal{M}_2$, $X, Y \in \mathcal{L}_0$ und $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $t, s \in \mathbf{R}_0^+$, $t > s$:*

- i) $(\alpha X + \beta Y).M = \alpha(X.M) + \beta(Y.M)$,
- ii) $X.(\alpha M + \beta N) = \alpha(X.M) + \beta(X.N)$,
- iii) $(X.M)_0 = 0$,
- iv) $E[(X.M)_t | \mathcal{F}_s] = (X.M)_s$,
- v) $E[(\int_s^t X \delta M)^2 | \mathcal{F}_s] = E[\int_s^t X^2 d\langle M \rangle | \mathcal{F}_s]$,
- vi) $\langle X.M \rangle_t = \int_0^t X^2 d\langle M \rangle$,
- vii) $d(X.M, Y.M) = d^M(X, Y)$,
- viii) $\langle X.M, Y.N \rangle_t = \int_0^t XY d\langle M, N \rangle$,
- ix) $X.M \in \mathcal{M}_2$.

Beweis: Exemplarisch sei hier v) bewiesen:

Zunächst folgt für Zeiten $x > w > v > u$, weil M ein Martingal ist,

$$\begin{aligned} E[f_w f_u (M_x - M_w)(M_v - M_u) | \mathcal{F}_s] &= E\left[E[f_w f_u (M_x - M_w)(M_v - M_u) | \mathcal{F}_w] \Big| \mathcal{F}_s\right] \\ &= E\left[f_w f_u E[(M_x - M_w) | \mathcal{F}_w] (M_v - M_u) \Big| \mathcal{F}_s\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Weiter gilt, weil $M^2 - \langle M \rangle$ ein Martingal ist,

$$\begin{aligned} E[f_u^2 (M_v - M_u)^2 | \mathcal{F}_s] &= E[f_u^2 E[M_v^2 - 2M_v M_u + M_u^2 | \mathcal{F}_u] | \mathcal{F}_s] \\ &= E[f_u^2 (M_v^2 - M_u^2) | \mathcal{F}_s] \\ &= E\left[f_u^2 (\langle M \rangle_v - \langle M \rangle_u) \Big| \mathcal{F}_s\right]. \end{aligned}$$

Damit folgt dann

$$\begin{aligned}
 & E \left[\left((X.M)_t - (X.M)_s \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
 &= E \left[\left(f_{m-1} (M_{t_m} - M_s) + \sum_{k=m}^{n-1} f_k (M_{t_{k+1}} - M_{t_k}) + f_{n-1} (M_t - M_{t_n}) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
 &= E \left[f_{m-1}^2 (M_{t_m} - M_s)^2 + \sum_{k=m}^{n-1} f_k^2 (M_{t_{k+1}} - M_{t_k})^2 + f_{n-1}^2 (M_t - M_{t_n})^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
 &= E \left[f_{m-1}^2 (\langle M_{t_m} \rangle - \langle M_s \rangle) + \sum_{k=m}^{n-1} f_k^2 (\langle M_{t_{k+1}} \rangle - \langle M_{t_k} \rangle) + f_{n-1}^2 (\langle M_t \rangle - \langle M_{t_n} \rangle) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
 &= E \left[\int_s^t X^2 d\langle M \rangle \right].
 \end{aligned}$$

Die anderen Beweise sind ähnlich. Das Itô-Integral ist also eine bilineare Isometrie $\mathcal{L}_0 \times \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathcal{M}_2$. \square

Entscheidend ist nun folgendes Lemma:

LEMMA 3.5. \mathcal{L}_0 ist dicht in $\mathcal{L}_2(M)$ für alle $M \in \mathcal{M}_2$.

Beweis: (Für $\langle M \rangle$ (pfadweise) absolutstetig) Für beschränktes $X \in \mathcal{L}_2(M)$ konvergiert

$$X_t^{(n)} := \begin{cases} X_0 & \text{für } t = 0, \\ X_{\frac{k}{2^n}} & \text{für } \frac{k}{2^n} < t \leq \frac{k+1}{2^n} \end{cases}$$

sogar pfadweise in $L^2([0, T])$ (bzgl. des Lebesgue-Maßes) für alle $T \in \mathbf{R}$, also erst recht in $\mathcal{L}_2(M)$.

Für unbeschränktes X betrachte die Folge der Stoppzeiten $\tau_n := \inf\{t \mid |X_t| > n\}$. Dann konvergiert die Folge der beschränkten Prozesse $(X_{t \wedge \tau_n})$ pfadweise in $L^2([0, T])$ gegen X . \square

Für nicht absolutstetiges $\langle M \rangle$ gibt es i.a. keine pfadweise konvergente Folge aus \mathcal{L}_0 . Man kann über eine Zeitparametrisierung den Beweis auf den obigen Fall zurückführen.

Wegen der Isometrieeigenschaft des Itô-Integrals ist für eine Cauchyfolge $X^{(n)} \in \mathcal{L}_0$ das Bild $X^{(n)}.M \in \mathcal{M}_2$ ebenfalls Cauchyfolge. Man kann jetzt also einfach definieren

DEFINITION: Sei $X \in \mathcal{L}_2(M)$. Für eine Folge $X^{(n)} \in \mathcal{L}_0$ mit $\lim X^{(n)} = X$ sei

$$X.M := \lim(X^{(n)}.M).$$

Ebenfalls wegen der Isometrieeigenschaft ist $X.M$ unabhängig von der gewählten Folge. Alle oben genannten Eigenschaften des Itô-Integrals übertragen sich sofort auf den Fall $X \in \mathcal{L}_2(M)$.

Man beachte, daß $X^{(n)}.M$ keineswegs pfadweise gegen $X.M$ konvergieren muß, wenn $X^{(n)}$ pfadweise gegen X konvergiert.

3.3. Lokale Martingale

Die Menge der Integratoren wird nun noch ein wenig erweitert werden. Das hat insbesondere den Vorteil, daß die Menge der Integranden größer und übersichtlicher wird.

DEFINITION: Die Menge der **lokalen (stetigen quadratisch integriblen) Martingale** \mathcal{M}^{loc} bestehe aus denjenigen stochastischen Prozessen M , für die eine monotone Folge von Stoppzeiten $\sigma_n \nearrow \infty$ P -f.s. mit

$$X^{\sigma_n} := (X_{t \wedge \sigma_n}) \in \mathcal{M}_2$$

existiert. (σ_n) heißt **Lokalisierung** von M .

Die Kreuzvariation $\langle M, N \rangle$ für $M, N \in \mathcal{M}^{\text{loc}}$ läßt sich wegen

$$\langle M^{\sigma_n}, N^{\sigma_n} \rangle_t = \langle M^{\sigma_m}, N^{\sigma_m} \rangle_{t \wedge \sigma_n}$$

für $n \leq m$ (Eindeutigkeit der Kreuzvariation) durch

$$\langle M, N \rangle_t := \langle M^{\sigma_n}, N^{\sigma_n} \rangle_t \quad \text{auf } \{t \leq \sigma_n\}$$

definieren. Die Menge der Integranden sei nun

DEFINITION: Für $M \in \mathcal{M}^{\text{loc}}$ enthalte $\mathcal{L}_2^{\text{loc}}(M)$ die adaptierten stückweise stetigen Prozesse X mit

$$\forall t > 0 : \left(\int_0^t X^2 d\langle M \rangle < \infty \quad P\text{-f.s.} \right).$$

Der Erwartungswert in der Definition von $\mathcal{L}_2(M)$ wird also durch eine pfadweise Bedingung ersetzt. Wie oben werden Elemente mit $d^M(X, Y) = 0$ identifiziert.

Um nun das Itô-Integral zu einer Abbildung $\mathcal{L}_2^{\text{loc}}(M) \times \mathcal{M}^{\text{loc}} \longrightarrow \mathcal{M}^{\text{loc}}$ fortzusetzen, betrachte man für $M \in \mathcal{M}^{\text{loc}}$ mit Lokalisierung (σ_n) , $X \in \mathcal{L}_2^{\text{loc}}(M)$ die Folge von Stoppzeiten

$$\tau_n := \sigma_n \wedge \inf\{t \mid \int_0^t X^2 d\langle M \rangle \geq n\}.$$

Dann gilt $M^{\tau_n} \in \mathcal{M}_2$ und $X^{\tau_n} := (X_{t \wedge \tau_n}) \in \mathcal{L}_2(M^{\tau_n})$, also ist $X^{\tau_n} \cdot M^{\tau_n}$ definiert.

Wegen $(X^{\tau_n} \cdot M^{\tau_n})_t = (X^{\tau_m} \cdot M^{\tau_m})_t$ für $0 \leq t \leq \tau_n$, $n \leq m$ läßt sich das Itô-Integral durch

$$(X \cdot M)_t := (X^{\tau_n} \cdot M^{\tau_n})_t \quad \text{auf } \{t \leq \tau_n\}$$

definieren. Genauso zeigt man die Unabhängigkeit von der gewählten Lokalisierung.

Wie oben ist das Integral bilinear und es gilt $\langle X \cdot M, Y \cdot N \rangle_t = \int_0^t XY d\langle M, N \rangle$, d.h., wenn man auch das Riemann-Stieltjes-Integral als Produkt darstellt,

$$\langle X \cdot M, Y \cdot N \rangle = XY \cdot \langle M, N \rangle.$$

Allerdings gilt jetzt nur $X \cdot M \in \mathcal{M}^{\text{loc}}$.

Eine nützliche Charakterisierung des Itô-Integrals gibt folgendes Lemma:

LEMMA 3.6. Sei $M \in \mathcal{M}^{\text{loc}}$, $X \in \mathcal{L}_2^{\text{loc}}(M)$. Für $I \in \mathcal{M}^{\text{loc}}$ gilt dann

$$I = X.M \iff \forall N \in \mathcal{M}^{\text{loc}} : \langle I, N \rangle = \int X d\langle M, N \rangle.$$

Sei $M \in \mathcal{M}_2$, $X \in \mathcal{L}_2(M)$. Für $I \in \mathcal{M}_2$ gilt dann

$$I = X.M \iff \forall N \in \mathcal{M}_2 : \langle I, N \rangle = \int X d\langle M, N \rangle.$$

Beweis: "⇒" ist bekannt. Setze für die andere Richtung $N := I - X.M$. Dann folgt $0 = \langle I, I - X.M \rangle - \langle X.M, I - X.M \rangle = \langle I - X.M, I - X.M \rangle$, also $I = X.M$. \square

3.4. Die Itô-Formel

Die Itô-Formel nimmt in der Stochastischen Analysis die Rolle des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung ein. Ihre etwas andere Form, die auch Ableitungen zweiter Ordnung beinhaltet, erlaubt interessante Anwendungen auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

ITÔ-FORMEL 3.7. Seien $m, n \in \mathbf{N}$, $M = (M^j)_{j=1}^m \in \mathcal{M}^{\text{loc}}$, $A = (A^k)_{k=1}^n$ stetiger adaptierter Prozeß von lokal beschränkter Variation, $Z := (M, A)$ habe Werte im Gebiet $D \subset \mathbf{R}^{m+n}$. Sei $f \in C^2(D)$.

Dann gilt P-f.s für alle $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} f(Z_t) - f(Z_0) &= \sum_{j=1}^m \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_j}(Z) \delta M^j + \sum_{k=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y_k}(Z) dA^k \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^m \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(Z) d\langle M^j, M^k \rangle. \end{aligned}$$

Insbesondere wird $f(Z_t)$ als Summe eines lokalen Martingales und eines Prozesses von beschränkter Variation ausgedrückt.

Beweis: (Skizze) Der Übersichtlichkeit halber wird nur der Fall M, A eindimensional betrachtet.

O.B.d.A. seien Z und $\langle M \rangle$ beschränkt und f habe kompakten Träger; anderenfalls wird Z mit einer Folge von Stoppzeiten τ_n lokalisiert. τ_n wird das Infimum der Zeitpunkte, zu denen $|M|$, $|A|$ oder $|\langle M \rangle|$ den Wert n überschreiten; für die Prozesse Z^{τ_n} ist dann alles beschränkt.

Partielle Ableitungen von f werden im folgenden durch f_x, f_{xy} etc. dargestellt. Mit einer Zerlegung $\Pi = (t_0, \dots, t_m)$ von $[0, t]$ folgt durch Taylorentwicklung

$$\begin{aligned}
 f(Z_t) - f(Z_0) &= \sum_{k=0}^{m-1} (f(Z_{t_{k+1}}) - f(Z_{t_k})) \\
 &= \sum_{k=0}^{m-1} f_x(Z_{t_k})(M_{t_{k+1}} - M_{t_k}) \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{m-1} f_y(Z_{t_k})(A_{t_{k+1}} - A_{t_k}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} f_{xx}(\zeta_k)(M_{t_{k+1}} - M_{t_k})^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} f_{xy}(\zeta_k)(M_{t_{k+1}} - M_{t_k})(A_{t_{k+1}} - A_{t_k}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} f_{yy}(\zeta_k)(A_{t_{k+1}} - A_{t_k})^2.
 \end{aligned}$$

Hierbei liegt jedes ζ_k zwischen $Z_{t_{k+1}}$ und Z_{t_k} .

Der zweite Term konvergiert P -f.s. pfadweise für $\|\Pi\| \searrow 0$ gegen $\int_0^t f_y dA$. Wegen der beschränkten Variation von A konvergieren die letzten beiden Summen ebenfalls P -f.s. pfadweise gegen 0.

Von dem ersten Term (einem Martingal) zeigt man mit Hilfe der Konstruktion des Integrals, daß er in $L^2(\Omega)$ gegen $\int_0^t f_x \delta M$ konvergiert. Die mittlere Summe konvergiert gegen $\int_0^t f_{xy} d\langle M \rangle$. \square

Stochastische Prozesse der Form $M + A$, (**stetige**) **Semimartingale** genannt, haben eine besonders große Bedeutung. Einerseits sind wichtige Prozesse wie lokale Martingale und Prozesse von lokal beschränkter Variation Semimartingale; andererseits sind nach der Itô-Formel die Bilder von Semimartingalen unter C^2 -Abbildungen wieder Semimartingale.

In den folgenden Anwendungen der Itô-Formel kommen solche Prozesse häufig vor. Integrale der Form $\int F \delta(M + A)$ sind dabei als $\int F \delta M + \int F dA$ zu interpretieren.

BEISPIELE: i) Sei $f(x, y) := (x + y)^2$. Mit $X := M + A$ erhält man

$$X_t^2 - X_0^2 = 2 \int_0^t X \delta X + \langle M \rangle_t,$$

eine mögliche Definition der Varianz über das Itô-Integral.

ii) Sei $f(x_1, x_2, y_1, y_2) := (x_1 + y_1)(x_2 + y_2)$. Mit $X := M_1 + A_1$ und $Y := M_2 + A_2$ erhält man die Produktregel

$$X_t Y_t - X_0 Y_0 = \int_0^t X \delta Y + \int_0^t Y \delta X + \langle M_1, M_2 \rangle.$$

iii) Sei $X := w + x_0$, w d -dimensionale Brownsche Bewegung, $x_0 \in \mathbf{R}^d$. Dann folgt

$$f(w_t + x_0) - f(x_0) = \int_0^t f'(w + x_0) \delta w + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta f(w_s + x_0) ds.$$

Für harmonische $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ gilt also insbesondere $f(w + x_0) - f(x_0) \in \mathcal{M}^{\text{loc}}$.

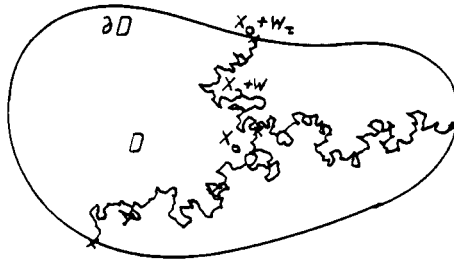
Mit Hilfe dieser Beziehung kann man das **Dirichlet-Problem** lösen:

Sei $D \subset \mathbf{R}^d$ beschränktes Gebiet, $g \in C(\partial D)$. Gesucht wird $f \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ mit $\Delta f = 0$ in D und $f = g$ auf dem Rand.

Sei f eine Lösung des Problems und

$$\tau := \inf\{t | w_t + x_0 \notin D\},$$

d.h. die Brownsche Bewegung, die in x_0 startet, erreicht zur Stoppzeit τ zum erstenmal den Rand.



Dann liefert der Stoppsatz die bemerkenswert anschauliche Darstellung

$$f(x_0) = E[f(w_0 + x_0)] = E[f(w_\tau + x_0)] = E[g(w_\tau + x_0)].$$

Für $d > 2$ gilt mit

$$f : \mathbf{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto |x|^{2-d}$$

$M_t := f(w_t + x_0) - f(x_0) \in \mathcal{M}^{\text{loc}}$, aber (wie man leicht durch einige Abschätzungen verifiziert) $E[M_t] \rightarrow -f(x_0)$ für $t \rightarrow \infty$. M ist also *kein* Martingal.

4. Stochastische Analysis

4.1. Stochastische Differentiale

In diesem Abschnitt wird eine übersichtliche Schreibweise für Itô- Differentialgleichungen eingeführt. Sei dazu \mathcal{C} die Menge der adaptierten stetigen Prozesse, \mathcal{A} enthalte die Prozesse von lokal beschränkter Variation aus \mathcal{C} mit Startwert 0 und $\mathcal{S} := \mathcal{A} + \mathcal{M}^{\text{loc}}$ sei die Menge der stetigen Semimartingale.

Die Darstellung eines Semimartingales $X = M + A$ als Summe eines lokalen Martingales und eines Prozesse von lokal beschränkter Variation ist eindeutig, denn

$$M + A = M' + A' \Rightarrow M - M' = A - A' \Rightarrow \langle M - M' \rangle = \langle A - A' \rangle = 0 \Rightarrow M = M' \quad P\text{-f.s.}$$

Für $X \in \mathcal{S}$ definiert man nun

$$\delta X := \{Y \in \mathcal{S} \mid X - X_0 = Y - Y_0 \quad P\text{-f.s.}\}.$$

Das ist nur eine Schreibweise für Integrale, bei der das Integralsymbol fortgelassen wird, denn

$$\delta Y = \delta X \iff \forall A \in \mathcal{C} : \int A \delta X = \int A \delta Y.$$

Man definiert natürlich als Summe $\delta X + \delta Y := \delta(X + Y)$ und als \mathcal{C} - Multiplikation $C \delta X := \delta(C.X)$. Eine Multiplikation wird durch $\delta(M^X + A^X) \delta(M^Y + A^Y) := \delta \langle M^X, M^Y \rangle$ eingeführt. Mit diesen Rechenregeln ist $\delta \mathcal{S}$ eine kommutative Algebra über \mathcal{C} .

Es gilt $\delta \mathcal{S} \delta \mathcal{S} \subset \delta \mathcal{A}$, $\delta \mathcal{S} \delta \mathcal{A} = 0$, also $\delta \mathcal{S} \delta \mathcal{S} \delta \mathcal{S} = 0$.

Die Itô-Formel für ein $X = (X^1, \dots, X^n) \in \mathcal{S}$ und $f \in C^2(\mathbf{R}^n)$ wird zu

$$\delta f(X) = f'(X) \delta X + \frac{1}{2} \sum \partial_j \partial_k f(X) \delta X^j \delta X^k.$$

Man kann nun eine \mathcal{S} -Multiplikation einführen, mit der die Itô-Formel übersichtlicher wird.

DEFINITION: Für $X, Y \in \mathcal{S}$ heißt

$$X dY := X \delta Y + \frac{1}{2} \delta X \delta Y$$

Stratonovich-Multiplikation. Das Integral

$$\int X dY := \int X \delta Y + \frac{1}{2} \int \delta X \delta Y$$

heißt **Stratonovich-Integral**. Seine Werte liegen i.a. nicht in \mathcal{M}^{loc} .

Das Symbol "dX" bedeutet also kein anderes Objekt als "δX", sondern signalisiert nur eine andere Multiplikation. Viele Autoren drücken dies durch eine andere Schreibweise aus, in der der Unterschied in das Produktsymbol geschoben wird:

Anstelle von $X dY$ schreibt man $X \circ dY$; statt δX kann man dann dX verwenden. Die \mathcal{C} -Multiplikation schreibt sich $C \bullet dX$. Die hier verwendete Schreibweise hat den Vorteil, daß das Bild von stochastischen Differentialen unter linearen Abbildungen übersichtlicher zu schreiben ist, nämlich $L(\delta X)$ und $L(dX)$ statt $L(\bullet dX)$ und $L(\circ dX)$. Dergleichen wird häufig vorkommen.

$d\mathcal{S}$ ist eine kommutative Algebra über \mathcal{S} . Mit Stratonovich- Differentialen kann man genauso rechnen, als hätte man deterministische Differentiale:

LEMMA 4.1. Für $X \in \mathcal{S}$ und $f \in C^3(!)$ gilt

$$df(X) = f' dX.$$

($df(X)$ bedeutet das Stratonovich-Differential des Prozesses $f(X)$).

Beweis:

$$\begin{aligned} f'(X) dX &= f' \delta X + \frac{1}{2} \delta f' \delta X \\ &= f' \delta X + \frac{1}{2} \sum_j \left(\sum_k \partial_k \partial_j f \delta X^k + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \partial_k \partial_l \partial_j f \delta X^k \delta X^l \right) \delta X^j \\ &= f' \delta X + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \partial_k \partial_j f \delta X^k \delta X^j \\ &= df(X). \end{aligned}$$

□

Da Stratonovich-Differentiale einfacher zu handhaben sind, wird mit den Beziehungen $dX = \delta X$, $dX dY := \delta X \delta Y$ und $X dA = X \delta A$ für $A \in \mathcal{A}$ immer d anstelle von δ geschrieben, also z.B. $dw^2 = 2w \delta w + dt$ statt $\delta w^2 = 2w \delta w + \delta t$.

4.2. Stochastische Differentialgleichungen

Für die konstruierten Differentiale kann man stochastische Differentialgleichungen betrachten.

DEFINITION: Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, (w_t) eine d - dimensionale Brownsche Bewegung mit Filtrierung (\mathcal{F}_t) , $\sigma : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{d \times n}$ und $b : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ seien stetig. Ein (\mathcal{F}_t) -adaptierter stetiger n -dimensionaler Prozeß (X_t) heißt **(starke) Lösung der (stochastischen) Differentialgleichung**

$$dX_t = \sigma(X_t) \delta w_t + b(X_t) dt \quad (*)$$

mit Startpunkt $x \in \mathbf{R}^n$, wenn P -f.s. $X_0 = x$ und $(*)$ gelten.

Einen anderen wichtigen Lösungsbegriff erhält man, wenn man (Ω, \mathcal{F}, P) und w nicht voraussetzt, sondern als Teil der Lösung auffaßt (schwache Lösung). Dieser Begriff wird in dieser Arbeit nicht benötigt.

Die stochastische Differentialgleichung besteht also aus einem zufälligen Anteil der Form $\sigma \delta w$ und einem Driftanteil $b dt$. Die Matrix σ bestimmt, in welche Richtungen die Brownsche Bewegung den Prozeß wie stark steuert; der Vektor b gibt die zugrundeliegende deterministische Bewegung an.

Die Wahl der Brownschen Bewegung als Motor der zufälligen Bewegung mutet vielleicht ein wenig speziell an. Tatsächlich läßt sich aber jedes (mehrdimensionale) Semimartingal mit absolutstetiger Kovariation unter relativ schwachen Bedingungen bzw. Vergrößerungen des Wahrscheinlichkeitsraumes nach einer Brownschen Bewegung "differenzieren", d.h. es erfüllt eine Differentialgleichung der obigen Art ohne Drift. Siehe dazu [Ikeda-Watanabe, II.7].

Die Beweise für Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen lassen sich analog zu denen für deterministische Differentialgleichungen führen:

SATZ 4.2. (*Existenz und pfadweise Eindeutigkeit*) Seien σ und b differenzierbar mit beschränkter Ableitung. Dann

i) existiert eine starke Lösung X und es gibt ein $C > 0$ mit

$$E[|X_t|^2] \leq C \left(1 + E[|X_0|^2]\right) e^{Ct}.$$

ii) Für zwei Lösungen X, \tilde{X} gilt P -f.s. $\forall t : X_t = \tilde{X}_t$.

BEMERKUNG: Die Bedingungen lassen sich problemlos abschwächen, siehe [Ikeda-Watanabe, IV.3], [Karatzas-Shreve, 5.5.2]. Man kann auch zeigen, daß die Ableitung der Lösungen nach einem Parameter existiert und die Lösung der Ableitung der Gleichung ist, wenn diese existiert und die Koeffizienten der Gleichung differenzierbar sind (siehe [Friedman]).

Beweis: (Nur Eindeutigkeit) Zu zeigen ist für alle $t \geq 0 : \alpha_t := E[|X_t|^2] = 0$. Sei $T \in \mathbf{R}^+$ und $0 \leq t \leq T$.

$$\underbrace{X_t - \tilde{X}_t}_{=:\Delta X_t} = \underbrace{\int_0^t \underbrace{(b(X_s) - b(\tilde{X}_s))}_{=:\Delta b_s} ds}_{=:A_t} + \underbrace{\int_0^t \underbrace{(\sigma(X_s) - \sigma(\tilde{X}_s))}_{=:\Delta \sigma_s} \delta w_s}_{=:M_t}.$$

Es existieren $C_1, C_2 \geq 0$ mit

$$E[|M_t|^2] = E\left[\int_0^t d\langle M \rangle\right] = E\left[\int_0^t |\Delta\sigma_s|^2 ds\right] \leq C_1 \int_0^t \alpha_t ds$$

und

$$E[|A_t|^2] = E\left[\left|\int_0^t \Delta b_s ds\right|^2\right] \leq TE\left[\int_0^t |\Delta b_s|^2 ds\right] \leq TC_2 \int_0^t \alpha_t ds.$$

Also folgt $\alpha_t \leq 2E[|M_t|^2 + |A_t|^2] \leq C_3 \int_0^t \alpha_t ds$. Nun gilt

$$\frac{d}{dt}(e^{-C_3 t} \int_0^t \alpha_t dt) = e^{-C_3 t}(\alpha_t - C_3 \int_0^t \alpha_t dt) \leq 0,$$

also $\alpha_t = 0$. Die Lösungen stimmen somit auf allen kompakten Zeitintervallen überein, also auch auf ganz \mathbf{R}_0^+ . \square

4.3. Explosionszeit

Die Einschränkung auf Faktoren mit beschränkten Ableitungen läßt sich ohne weiteres nicht aufheben; schon die (deterministische) Gleichung $dX = X^2 dt$ mit $X_0 = 1$ hat als Lösung eine bei 1 un stetige Funktion, nämlich $X_t = (1 - t)^{-1}$. Um dieses Verhalten mit einzubeziehen, verwendet man den Begriff der Explosionszeit.

Sei dazu $\hat{\mathbf{R}}^n := \mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$ die Ein-Punkt-Kompaktifizierung. Anstelle von Pfaden aus $C(\mathbf{R}_0^+, \mathbf{R}^n)$ betrachtet man Pfade aus

$$\hat{W}^n := \{f \in C(\mathbf{R}_0^+, \hat{\mathbf{R}}^n) | \forall t : f_t = \infty \Rightarrow \forall t' > t : f_{t'} = \infty\}.$$

\hat{W}^n wird mit der von den Borelschen Zylindermengen erzeugten σ -Algebra $\mathcal{B}(\hat{W}^n)$ ausgestattet. Die Definition der starken Lösung wird nun erweitert.

DEFINITION: Eine (**starke**) **Lösung** der Differentialgleichung (*) ist eine $(\hat{W}^n, \mathcal{B}(\hat{W}^n))$ -wertige (\mathcal{F}_t) -adaptierte Zufallsvariable $X(t, x, w)$, für die mit

$$e(w) := \inf\{t \geq 0 | X(t, x, w) = \infty\}$$

für eine Zeit t auf $\{w | t < e(w)\} \subset \Omega$ gilt:

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s) \delta w_s + \int_0^t b(X_s) ds.$$

e heißt **Explosionszeit**.

SATZ 4.3. (*Existenz und pfadweise Eindeutigkeit*) Seien σ und b differenzierbar. Dann ist die Differentialgleichung (*) (pfadweise) eindeutig stark lösbar.

5. Prozesse auf Mannigfaltigkeiten

5.1. Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten

Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit und

$$\hat{M} := \begin{cases} M & \text{für kompaktes } M \\ M \cup \{\infty\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Menge der Pfade ist

$$\hat{W} := \{c \in C(\mathbf{R}_0^+, \hat{M}) \mid \forall t : c_t = \infty \Rightarrow \forall t' > t : c_{t'} = \infty\},$$

die σ -Algebra $\mathcal{B}(\hat{W})$ werde von den Borelschen Zylindermengen erzeugt.

DEFINITION: Sei (w_t) eine d -dimensionale Brownsche Bewegung mit Standardfiltrierung (\mathcal{F}_t) , $A_j \in \Gamma(TM)$ für $0 \leq j \leq d$. Eine $(\hat{W}, \mathcal{B}(\hat{W}))$ -wertige (\mathcal{F}_t) -adaptierte Zufallsvariable heißt **Lösung der Differentialgleichung**

$$dX_t = \sum_{j=1}^d A_{j|X_t} dw_t^j + A_{0|X_t} dt, \quad (**)$$

wenn für alle $f \in C_0^\infty(M)$ auf $\{e > t\}$ gilt:

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{j=1}^d \int_0^t (A_j f)(X_s) dw_s^j + (A_0 f)(X_s) ds.$$

Dabei wird natürlich $f(\infty) := 0$ definiert.

Diese Definition ist wegen der mit dem deterministischen Differentialkalkül verträglichen Rechenregeln für das Stratonovich-Differential sinnvoll. Zum Beispiel folgt aus der Richtigkeit der unteren Differentialgleichung für ein $f \in C_0^\infty(M)$, daß sie auch für Kompositionen $g \circ f$ gilt. Für den euklidischen Raum stimmt diese Definition der Lösung mit der vorherigen überein.

Das Lösungsproblem einer Differentialgleichung mit Itô-Differentials läßt sich dagegen nicht ohne weiteres sinnvoll stellen. Man kann dergleichen mit Hilfe der stochastischen Parallelverschiebung definieren, siehe dazu [Bismut].

Um nun die Existenz einer Lösung zu zeigen, muß man lokale Lösungen kartenweise "zusammenkleben": Wenn eine Lösung eine Karte verläßt (dieser Zeitpunkt ist eine Stoppzeit), wird sie durch eine Lösung in der nächsten Karte fortgesetzt.

SATZ 5.1. (*Existenz und Eindeutigkeit*) Es existiert eine (pfadweise) eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung (**).

Beweis: (Skizze, vgl. [Ikeda-Watanabe, V.1]) In einer Karte $\varphi : U(x) \rightarrow \mathbf{R}^n$ um $x \in M$ mit beschränktem Bild sei $A_j = \sigma_j^k \frac{\partial}{\partial x^k}$. Die σ_j^k werden zu $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ -Funktionen fortgesetzt. Nach dem vorherigen Existenzsatz hat die Gleichung $dX = \sum_j \sigma_j(X) dw^j + \sigma_0(X) dt$ eine Lösung X , denn diese Stratonovich-Differentialgleichung ist äquivalent zur Itô-Differentialgleichung $dX = \sum_j \sigma_j(X) \delta w^j + \tilde{\sigma}_0(X) dt$ mit

$$\tilde{\sigma}_0^k = \sigma_0^k + \frac{1}{2} \sum_{j,l} \sigma_j^l \frac{\partial}{\partial x^l} \sigma_j^k.$$

Sei $\tau_U := \inf\{t | X_t \notin U\}$ und $X^U := (X_{t \wedge \tau_U})$. Für zwei Karten (U, φ) und (V, ψ) sind die Prozesse X_U und X_V mit Startpunkt $x \in U \cap V$ auf $U \cap V$ gleich (dank der Kettenregel für Stratonovich-Differentiale und der pfadweisen Eindeutigkeit).

Für eine lokal endliche Überdeckung mit Karten definiert man für eine Karte (U, φ) mit $x_0 := x \in U$ und maximalem $\tau_1 := \tau_U$ als Lösung $X_t := X_t^U$ auf $\{t < \tau_1\}$. Dann definiert man induktiv auf $\{\tau_n < \infty\}$

$$x_n := X(\tau_n), \quad w_n := \theta_{\tau_n} w - w_{\tau_n}, \quad \tau_{n+1} := \tau_n + \tau_{U_n}$$

und $X(t, x, w) := X^{U_n}(t - \tau_n, x_n, w_n)$ auf $\{\tau_n \leq t < \tau_{n+1}\}$ zu einer neuen Karte $U_n \ni x_n$ mit maximalem τ_{U_n} ($\theta_t : w \mapsto (w_{s+t})_s$ ist das Shift-Funktional).

Nun kann man zeigen, daß mit $\tau_\infty := \lim_{n \nearrow \infty} \tau_n$

$$\lim_{t \nearrow \tau_\infty} X(t) = \infty \quad \text{auf } \{\tau_\infty < \infty\}.$$

Auf $\{t \geq \tau_\infty\}$ wird $X(t) := \infty$ gesetzt. Nach Konstruktion und Stoppsatz ist X eine eindeutige Lösung der Differentialgleichung. \square

5.2. Wärmeleitungsgleichungen auf Mannigfaltigkeiten

Zur Illustration der Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen wird in diesem Abschnitt als Beispiel und Motivation die Wärmeleitungsgleichung für Differentialoperatoren der Form

$$A = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d A_j^2 + A_0$$

mit Vektorfeldern A_j , $0 \leq j \leq d$, gelöst. Leider gibt es für den wichtigen Laplace-Beltrami-Operator keine kanonische Wahl der Vektorfelder A_j . Auf einer $2k_0$ -Sphäre benötigt man jedenfalls $d > 2k_0$, da jedes Vektorfeld eine Nullstelle hat (tatsächlich genügen $d = 2k_0 + 1$).

Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit und X Lösung der Differentialgleichung (**). E_x bezeichnet den Erwartungswert für Anfangswert $X_0 = x \in M$.

SATZ 5.2. Für $f \in C^\infty(M)$ sei $u(t, x) := E_x[f(X_t)]$. Dann ist $u \in C^\infty(\mathbf{R}_0^+ \times M)$ und erfüllt die Bedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au, \quad u|_{t=0} = f.$$

u ist die eindeutige Lösung der Differentialgleichung.

Beweis: u ist Lösung (Skizze): Zum Nachweis der Differenzierbarkeit in x kann man zeigen, daß $x \mapsto X(t, x, w) \in C^\infty$ ist. Dazu approximiert man $X(t, \cdot, w)$ und die Ableitungen mit dem Euler-Verfahren längs einer dyadischen Zerlegung der Zeitachse. Dann kann man beweisen, daß die Approximationen von X in jedem Soboleff-Raum $W_p^m(M)$ gegen X konvergieren, also auch gleichmäßig in C^∞ . Für Einzelheiten siehe [Ikeda-Watanabe, V.2] (tatsächlich ist $X(t, \cdot, w)$ sogar ein Fluß).

Nun ist $df(X)$ bis auf ein lokales Martingal gleich $(Af)(X) dt$, denn

$$\begin{aligned} df(X) &= \sum (A_j f)(X) dw^j + (A_0 f)(X) dt \\ &= \sum (A_j f)(X) \delta w^j + \frac{1}{2} \sum d((A_j f)(X)) dw^j + (A_0 f)(X) dt \\ &= \sum (A_j f)(X) \delta w^j + \frac{1}{2} \sum \left(\sum (A_k A_j f)(X) dw^k \right. \\ &\quad \left. + (A_0 A_j f)(X) dt \right) dw^j + (A_0 f)(X) dt \\ &= \sum (A_j f)(X) \delta w^j + \frac{1}{2} \sum (A_j A_j f)(X) dt + (A_0 f)(X) dt. \end{aligned}$$

Durch Erwartungswertbildung erhält man

$$u(t, x) = f(x) + \int_0^t E_x[(Af)(X_s)] ds.$$

Man zeigt

$$(Au_t)(x) = \lim_{s \searrow 0} \frac{E[u_t(X_s)] - u_t(x)}{s} = \lim_{s \searrow 0} \frac{1}{2} E \left[\int_0^s (Af)(X_{r+t}) dr \right] = E[(Af)(X_t)],$$

also $\frac{\partial u}{\partial t} = Au$. Durch Differenzieren der Differentialgleichung nach t zeigt man $u \in C^\infty$ in t .

Eindeutigkeit: Sei v eine Lösung der Differentialgleichung. Dann gilt für $T > 0$ und $0 \leq t \leq T$

$$E[v(T-t, X_t)] - v(T, x) = E \left[\int_0^t ((Av)(T-s, X_s) - \frac{\partial v}{\partial t}(T-s, X_s)) ds \right] = 0.$$

Mit $t \nearrow T$ folgt $u = v$. □

Genauso zeigt man

SATZ 5.3. (Feynman-Kac-Formel) Für $f, c \in C^\infty(M)$ wird das Problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (A + c)u, \quad u|_{t=0} = f$$

von

$$u(t, x) := E_x \left[e^{\int_0^t c(X_s) ds} f(X_t) \right]$$

gelöst.

5.3. Brownsche Bewegung auf Mannigfaltigkeiten

Der Begriff "Semimartingal" läßt sich dank der Itô-Formel leicht auf C^∞ -Mannigfaltigkeiten verallgemeinern: Ein Semimartingal ist ein Prozeß, dessen Bilder unter reellwertigen Testfunktionen reelle Semimartingale sind.

Die Übertragung der Begriffe "Martingal" und "Brownsche Bewegung" stößt jedoch auf Schwierigkeiten, da man auf Mannigfaltigkeiten keinen Erwartungswert bilden kann. Man muß deshalb zusätzliche Strukturen auf der Mannigfaltigkeit einführen.

Sei deshalb M eine n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang, $\vee(M) \xrightarrow{\pi} M$ sei das Bündel der ON-Basen. Für $v \in \mathbf{R}^n$ definiert man das **kanonische horizontale Vektorfeld** $L(v) \in \Gamma(T\vee(M))$ am Punkt $u \in \vee(M)$ durch den horizontalen Lift von uv ,

$$L(v)|_u := (uv)|_u^*.$$

Anschaulich heißt das, $L(v)|_u$ ist die infinitesimale Parallelverschiebung der ON-Basis u längs einer Kurve mit Startvektor uv . Die $L(e_j)$ bilden eine Basis der horizontalen Distribution.

Nun definiert man zu einem \mathbf{R}^n -wertigen Semimartingal γ seine **Cartan-Entwicklung** x auf M , indem man einen Prozeß u auf $\vee(M)$ durch die Gleichung

$$du = L(d\gamma)|_u$$

mit Startpunkt u_0 definiert und dann

$$x := \pi(u)$$

setzt. Insbesondere gilt somit $dx = u d\gamma$ und $du = (dx)|_u^*$.

Für differenzierbares γ ist u also die Parallelverschiebung längs x . \dot{x}_t ist gleich der Parallelverschiebung von $u_0 \dot{\gamma}_t$ nach x_t . Insbesondere werden Geraden auf Geodätische abgebildet.

Man kann sich diese Abbildung für $n = 2$ so vorstellen, als würde man die Mannigfaltigkeit auf der Kurve $u_0 \gamma$ abrollen, ohne zu rutschen. Eine andere Möglichkeit ist, sich die Kurve γ als schmalen Papierstreifen denken, der auf die Mannigfaltigkeit geklebt wird.

Nun heißt ein Prozeß x **Martingal auf M** , wenn er die Cartan-Entwicklung eines Martingals ist, und **Brownsche Bewegung auf M** für $\gamma = w$. Wegen der Rotations-symmetrie der Brownschen Bewegung w ist die Verteilung der Brownschen Bewegung auf M nicht von u_0 abhängig. M heißt **stochastisch vollständig**, wenn die Explosionszeit der Brownschen Bewegung unendlich ist. Insbesondere sind kompakte Mannigfaltigkeiten stochastisch vollständig.

Die wichtigste Eigenschaft der Brownschen Bewegung ist nun

LEMMA 5.4. Sei M stochastisch vollständig. Dann löst die Brownsche Bewegung x auf M die Wärmeleitungsgleichung für den Laplace-Beltrami-Operator, genauer: Für $f \in C_0^\infty(M)$ ist

$$(f(x_t) - f(x_0) - \int_0^t \frac{1}{2} \Delta f(x_s) ds)_t$$

ein Martingal.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} df(x) &= (df)|_x(dx) = (df)(u dw) \\ &= (df)(u \delta w) + \frac{1}{2} du \cdot (df)(u dw) \\ &= (df)(u \delta w) + \frac{1}{2} (u dw)^* (df)(u dw) \\ &= (df)(u \delta w) + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \nabla(df)(u \mathbf{e}_j, u \mathbf{e}_k) dw^j dw^k \\ &= (df)(u \delta w) + \frac{1}{2} \sum_j \nabla(df)(u \mathbf{e}_j, u \mathbf{e}_j) dt \\ &= (df)(u \delta w) + \frac{1}{2} \Delta f(x) dt. \end{aligned}$$

(df) bezeichnet hier das äußere Differential von f . Das fünfte Gleichheitszeichen entsteht durch die Definition von ∇ nach [Kobayashi-Nomizu]. Für zwei Vektorfelder X, Y auf M ist

$$(\nabla df)(X, Y) = \nabla_X((df)(Y)) - df(\nabla_X Y).$$

Das letzte Gleichheitszeichen ist die Definition von Δ . Die Ausdrücke " $u \delta w$ " rufen vielleicht den Eindruck hervor, in dieser Rechnung würden Itô-Differentiale von Prozessen auf M auftreten. Man überzeuge sich davon, daß tatsächlich nur Itô-Differentiale von reellwertigen Prozessen vorkommen.

□

BEMERKUNG: Anstelle des Levi-Civita-Zusammenhangs kann man einen beliebigen anderen mit der Metrik kompatiblen affinen Zusammenhang ∇ verwenden und damit ∇ -Martingale und ∇ -Brownsche Bewegungen definieren. Mit einer geeigneten Wahl von Metrik und Zusammenhang läßt sich die Wärmeleitungsgleichung für jeden elliptische Differentialoperator zweiter Ordnung mit der Brownschen Bewegung und der Feynman-Kac-Formel lösen, siehe [Ikeda-Watanabe, V.4].

6. Das Atiyah-Singer-Indextheorem

In diesem Kapitel sei M eine kompakte orientierbare riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 2k_0$.

6.1. Charakteristische Klassen

Sei E ein m -dimensionales komplexes Vektorbündel auf M . Wähle einen linearen Zusammenhang ∇ auf E mit Krümmungstensor R . Sei $P : \text{End}(\mathbf{C}^m) \rightarrow \mathbf{C}$ ein Polynom über \mathbf{C} mit der Invarianzeigenschaft

$$\forall h \in \mathbf{GL}(\mathbf{C}, m), A \in \mathfrak{gl}(\mathbf{C}, m) : P(hAh^{-1}) = P(A).$$

In einem lokalen ON-Bein kann R als Matrix aus 2-Formen ausgedrückt werden. Die gerade Form $P(R)$ ist dann wegen der Invarianz von P unabhängig von dem gewählten ON-Bein und somit global definiert. Anstelle eines Polynomes kann man hier auch eine invariante (formale) Potenzreihe verwenden, da die 2-Formen nilpotent sind. Es gilt nun

LEMMA 6.1. *Die Form $P(R)$ ist geschlossen, bestimmt also eine Kohomologieklassse in der de Rham-Kohomologie. Diese Kohomologieklassse ist unabhängig von der Wahl von ∇ .*

Zum Beweis vergleiche [Milnor-Stasheff], [Kobayashi-Nomizu], [Gilkey] oder [Roe].

Sei $g : M' \rightarrow M$ eine Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten, g^*R der induzierte Krümmungstensor auf M' . Dann gilt natürlich $P(g^*R) = g^*P(R)$, P definiert also eine charakteristische Klasse.

Insbesondere sind für im Nullpunkt holomorphe Abbildungen $f : \mathbf{C} \supset U \rightarrow \mathbf{C}$ durch

$$\text{tr } f\left(\frac{iR}{2\pi}\right) \quad \text{und} \quad \det f\left(\frac{iR}{2\pi}\right)$$

charakteristische Klassen definiert.

Auf diese Weise erhält man den Chern-Charakter als

$$ch(E) = \text{tr } e^{\frac{iR}{2\pi}}$$

und die Toddklasse $td(E)$ sowie die \hat{A} -Klasse $\hat{A}(E)$ als $\det f\left(\frac{iR}{2\pi}\right)$ mit

$$f(z) := \frac{z}{1 - e^{-z}} \quad \text{bzw.} \quad f(z) := \sqrt{\frac{z/2}{\sinh(z/2)}}.$$

Die Eulerklasse auf orientierten reellen Vektorbündeln wird durch das Pfaffsche Polynom ausgedrückt:

DEFINITION: $\mathfrak{so}(m)$ wird mit $\Lambda^2 \mathbf{R}^{2m}$ identifiziert vermöge des Homomorphismusses

$$(A_{jk}) \mapsto \sum_{j < k} A_{jk} \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k.$$

Das **Pfaffsche Polynom** Pf wird dann definiert durch

$$A^{\wedge m} =: m! Pf(A) \mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{2m}.$$

LEMMA 6.2. *Es gilt für $A \in \mathfrak{so}(m)$ $Pf(A)^2 = \det(A)$, insbesondere ist Pf invariant unter Konjugation mit $\vee(m)$.*

Die Eulerklasse wird auf Bündeln mit Metrik und kompatibelem Zusammenhang durch $Pf(\frac{iR}{2\pi})$ repräsentiert.

ATIYAH-SINGER-INDEXTHEOREM 6.3. *(allgemeine Form) Seien E und F zwei Vektorbündel über M und $D : E \rightarrow F$ ein elliptischer Differentialoperator 1. Ordnung (der einige Natürlichkeitsbedingungen erfüllen muß, siehe [Atiyah-Bott-Patodi]). Dann gilt für den Index von D*

$$\begin{aligned} \text{index } D &:= \dim_{\mathbf{C}} \ker D - \dim_{\mathbf{C}} \text{coker } D \\ &= \int \frac{ch E - ch F}{e(TM)} \wedge td(TM \otimes \mathbf{C}). \end{aligned}$$

Dieser Satz folgt nach [Atiyah-Bott-Patodi] aus dem lokalen Indexsatz für den Signatur-Komplex, welcher äquivalent zum lokalen Indexsatz für den Spin-Komplex ist. Im folgenden wird erklärt werden, was der Spin-Komplex, der Dirac-Operator und der lokale Indexsatz sind. Zunächst das (globale)

INDEXTHEOREM FÜR DEN SPIN-KOMPLEX 6.4. *Sei $D_+ : S_+ \otimes \xi \rightarrow S_- \otimes \xi$ der Dirac-Operator, dann gilt*

$$\text{index } D_+ = \int \hat{A}(TM \otimes \mathbf{C}) \wedge ch(\xi).$$

6.2. Spinoren

Der Spin-Komplex besteht aus zwei Vektorraum-Bündeln S_+ und S_- , welche Unterbündel eines sogenannten Spinorbündels sind, und einem Differentialoperator, welcher das eine in das andere abbildet, dem Dirac-Operator. Zur Definition der Begriffe werden zunächst Clifford-Algebren eingeführt.

MOTIVATION: Im \mathbf{R}^n werde ein Differentialoperator $D = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ ($a_j \in \mathfrak{gl}(\mathbf{C}, n)$) gesucht mit

$$D^2 = -Id \cdot \Delta = -Id \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial^2 x_j}.$$

Dies führt auf die Bedingungen

$$\begin{aligned} a_j^2 &= -Id, \\ a_j a_k &= -a_k a_j. \end{aligned}$$

DEFINITION: Sei V \mathbf{R} -Vektorraum der Dimension $n = 2k_0$ mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Die **Clifford-Algebra** zu V ist

$$\text{Cliff}(V) := \bigotimes V / (v \otimes v + \langle v, v \rangle |v \in V).$$

Dabei ist $\bigotimes V = \mathbf{R} \oplus V \oplus V \otimes V \oplus \dots$ die \mathbf{R} -Tensoralgebra über V .

V wird kanonisch in $\text{Cliff}(V)$ eingebettet. Für euklidische Vektorräume V mit einer ON-Basis $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ ist also

$$\text{Cliff}(V) = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n | \mathbf{e}_j^2 + 1, \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j, 1 \leq j, k \leq n \rangle.$$

DEFINITION: Die Untergruppe

$$\mathbf{Spin}(n) := \{v_1 \cdots v_{2j} \in \text{Cliff}(V) \mid |v_k| = 1, j \in \mathbf{N}_0, 1 \leq k \leq j\}$$

heißt **Spingruppe**.

$\mathbf{Spin}(n)$ operiert auf \mathbf{R}^n durch $\sigma_x : v \mapsto xv x^{-1}$, $x \in \mathbf{Spin}(n)$. σ_x wird für $x \in \mathbf{R}^n$ die Spiegelung an der Hyperebene senkrecht zu x , wie man in einer geeigneten ON-Basis leicht überprüft. Somit ist $\sigma : \mathbf{Spin}(n) \rightarrow \mathbf{SO}(n)$ surjektiv.

Es gilt $\ker \sigma = \pm 1$, denn $(\forall v : xv = vx) \Rightarrow x \in \mathbf{R}$. Außerdem ist **Spin** zusammenhängend, da die Kurve

$$t \mapsto \cos t + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \sin t$$

+1 und -1 verbindet.

$\mathbf{Spin}(n)$ ist also (die) zweifache Überlagerung von $\mathbf{SO}(n)$, insbesondere für $n > 2$ einfach zusammenhängend. Mit dieser Beziehung kann man $\mathbf{Spin}(n)$ auch für ungerades n definieren. Damit erhält man

BEISPIELE: $\mathbf{Spin}(2) = S^1$, $\mathbf{Spin}(3) = S^3$, $\mathbf{Spin}(4) = S^3 \times S^3$, $\mathbf{Spin}(5) = \mathbf{Sp}(2)$,
 $\mathbf{Spin}(6) = \mathbf{SU}(4)$.

LEMMA UND DEFINITION 6.5. *Es gibt einen Algebra-Isomorphismus*

$$\rho : \text{Cliff}(V) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \xrightarrow{\cong} \text{End}(\tilde{S})$$

für einen k_0 -dimensionalen hermiteschen \mathbf{C} -Vektorraum \tilde{S} . \tilde{S} heißt **Spinorraum**.

Man beachte, daß $\text{Cliff}(V) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = \text{Cliff}(V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})$, wobei das Skalarprodukt von $V \otimes \mathbf{C}$ durch $|x + iy|^2 := |x|^2 - |y|^2$, $x, y \in V$ induziert wird. Für den Beweis des Lemmas siehe [Atiyah-Bott-Shapiro], [Gilkey] oder [Roe].

\tilde{S} zerfällt in die ± 1 Eigenräume \tilde{S}_{\pm} von $\tau := i^{k_0} \mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n$, da $\tau^2 = 1$. τ hängt nur von der Orientierung der ON-Basis ab. ρ respektiert diese Zerlegung.

6.3. Das Spin-Bündel

DEFINITION: M heißt **Spin-Mannigfaltigkeit** : \iff Es existiert ein Prinzipal-**Spin**(n)-Bündel **Spin**(M), so daß jede Faser $\mathbf{Z}/2$ -Überlagerung der entsprechenden Faser in **SO**(M) ist (als Liegruppe).

Das von der Darstellung ρ induzierte Vektorraum-Bündel $S := \mathbf{Spin}(M) \times_{\mathbf{Spin}(n)} \tilde{S}$ heißt **Spinorbündel**.

$\mathbf{Spin}(M) \times_{\mathbf{Spin}(n)} \tilde{S}$ ist dabei definiert als $(\mathbf{Spin}(M) \times \tilde{S})/\mathbf{Spin}(n)$ mit der Aktion

$$(h, s)g := (hg, \rho(g^{-1})s) \quad \forall h \in \mathbf{Spin}(M), s \in \tilde{S}, g \in \mathbf{Spin}(n).$$

BEISPIEL: Wegen $\mathbf{SO}(S^n) = \mathbf{SO}(n+1)$ gilt $\mathbf{Spin}(S^n) = \mathbf{Spin}(n+1)$. Für S^2 erhält man gerade die Hopf-Faserung.

M erlaubt genau dann eine Spinstruktur, wenn für die zweite Stiefel-Whitney-Klasse $w_2 = 0$ gilt. Es gibt dann genau soviele verschiedene Spinstrukturen wie zweifache Überlagerungen der Mannigfaltigkeit.

Man beachte, daß $\text{Cliff}(TM \otimes \mathbf{C}) \cong \text{End}(S)$ wegen

$$x(vs) = (xvx^{-1})(xs) = \sigma_x(v) \cdot (xs) \quad \forall x \in \mathbf{Spin}(n), v \in V, s \in S.$$

Natürlich existiert $\text{Cliff}(TM \otimes \mathbf{C})$ auch dann, wenn die Mannigfaltigkeit keine Spinstruktur zuläßt.

Im folgenden wird stets ohne weiteren Hinweis angenommen, daß M eine Spin-Mannigfaltigkeit ist.

Der Liealgebra-Isomorphismus σ^* bildet ein Element $(A_{ij})_{i,j=1}^n$ der Liealgebra $\mathfrak{so}(n)$ von $\mathbf{SO}(n)$ auf $\frac{1}{2} \sum_{i < j} A_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \in \text{Cliff}(V)$ ab. Zum Beweis lifte man Kurven der Form $\text{exp}_{\mathbf{SO}(n)}(t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix})$ zu $e^{\frac{t}{2} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2} \in \mathbf{Spin}(n)$ etc. und differenziere bei 0.

Auf S ist ein kanonischer Zusammenhang (der **Spin-Zusammenhang**) gegeben durch den Lift des Levi-Civita-Zusammenhangs von $\mathbf{SO}(M)$ nach $\mathbf{Spin}(M)$, d.h. für die Zusammenhangsformen $\omega_{\mathbf{SO}} : T\mathbf{SO}(M) \rightarrow \mathfrak{so}$ und $\omega_{\mathbf{Spin}} : T\mathbf{Spin}(M) \rightarrow \mathfrak{spin}$ gilt

$$\omega_{\mathbf{Spin}}(X) = \sigma^*(\omega_{\mathbf{SO}}(\sigma_*X)) \quad (X \in T\mathbf{Spin}(M)).$$

Sei $B = (e_1, \dots, e_n)$ ein lokales ON-Bein auf M , \tilde{B} einer seiner beiden Lifts auf $\mathbf{Spin}(M)$. Mit Γ_{ij}^k definiert durch

$$\nabla_{e_i} e_j =: \Gamma_{ij}^k e_k$$

gilt dann

$$\nabla_{e_i}(\tilde{B}, \mathbf{e}_j) = (\tilde{B}, \frac{1}{4}\Gamma_{il}^k \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_j).$$

TM operiert auf S durch Cliffordmultiplikation, lokal $e_k \cdot (\tilde{B}, v) = (\tilde{B}, \mathbf{e}_k \cdot v)$ für eine Funktion $v : V = \mathbf{R}^n \rightarrow \tilde{S}$. Man überprüft mit den Rechenregeln für Clifford-Algebren leicht, daß

$$\nabla_X(Y \cdot s) = (\nabla_X Y) \cdot s + Y \cdot \nabla_X s \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM), s \in \Gamma(S).$$

DEFINITION: Sei ξ ein n_0 -dimensionales hermitesches Vektorbündel auf M mit riemannischem Zusammenhang ∇ . Das Vektorbündel $S \otimes_{\mathbf{C}} \xi$ heißt das **mit ξ getwistete** Vektorbündel.

Der **Dirac-Operator**

$$D_{\pm} : \Gamma(S_{\pm} \otimes \xi) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes S_{\pm} \otimes \xi) \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} \Gamma(TM \otimes S_{\pm} \otimes \xi) \xrightarrow{\rho \otimes 1} \Gamma(S_{\mp} \otimes \xi)$$

entsteht durch Verknüpfung der Clifford-Multiplikation mit der kovarianten Ableitung.

Auf diese Weise erhält man einen Differentialoperator von $S \otimes \xi$ nach $S \otimes \xi$.

BEMERKUNG: Lokal gilt für $f \in \Gamma(S)$, $g \in \Gamma(\xi)$

$$D(f \otimes g) = \sum_{j=1}^n (e_j \nabla_{e_j} f \otimes g + e_j f \otimes \nabla_{e_j} g).$$

Mit dem Skalarprodukt $(f_1, f_2) := \int_M \langle f_1, f_2 \rangle dvol$ für Schnitte $f_1, f_2 \in \Gamma(S \otimes \xi)$ gilt $D^* = D$ und $D_{\pm}^* = D_{\mp}$. D ist ein Fredholm-Operator, d.h. $\ker D$ und $\ker D^*$ sind endlichdimensional, im D und im D^* sind abgeschlossen (siehe [Roe, 9], [Gilkey]).

Es ist also sinnvoll, nach

$$\text{index } D_+ = \dim \ker D_+ - \dim \ker D_-$$

zu fragen (der Index des Dirac-Operators D selbst ist natürlich 0). Diesen Index kann man nun mit Hilfe der Wärmeleitungsgleichung durch eine lokale Formel ausdrücken.

Sei dazu $E_{\pm}(\lambda)$ der λ -Eigenraum von $D_{\mp}D_{\pm}$, $\lambda \in \mathbf{R}$. $\text{Tr}_s := \text{Tr}_{\Gamma(S_+ \otimes \xi)} - \text{Tr}_{\Gamma(S_- \otimes \xi)} = \text{Tr}_{\Gamma(S \otimes \xi)}(\cdot\tau)$ sei die **Superspur**.

$k : \mathbf{R}_0^+ \times M \times M \longrightarrow \text{End}(S \otimes \xi)$ sei der Wärmeleitungskern für $-\frac{1}{2}D^2$, d.h. für $u \in C^\infty(M, \mathbf{R} \times S \otimes \xi)$ mit

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}D^2u &= \frac{\partial u}{\partial t}, \\ u(0, x) &= f(x) \end{aligned}$$

gilt

$$u(t, x) = \int_M f(y)k(t, x, y) \, d\text{vol}|_y.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{index } D_+ &= e^{\frac{t}{2} \cdot 0} (\dim E_+(0) - \dim E_-(0)) \\ &= \sum_{\lambda} e^{-\frac{t}{2}\lambda} (\dim E_+(\lambda) - \dim E_-(\lambda)) \\ &= \text{Tr}_{\Gamma(S_+ \otimes \xi)} e^{-\frac{t}{2}D^2} - \text{Tr}_{\Gamma(S_- \otimes \xi)} e^{-\frac{t}{2}D^2} \\ &= \text{Tr}_s e^{-\frac{t}{2}D^2} \\ &= \int_M \text{Tr}_s k(t, x, x) \, d\text{vol}|_x. \end{aligned}$$

Das zweite Gleichheitszeichen gilt, weil

$$\lambda = D_{\mp}D_{\pm} : E_{\pm}(\lambda) \xrightarrow{\cdot\lambda} E_{\mp}(\lambda)$$

für $\lambda \neq 0$ ein Isomorphismus ist. In der letzten Zeile und im folgenden ist Tr_s als $\text{Tr}_{S_+ \otimes \xi} - \text{Tr}_{S_- \otimes \xi}$ definiert.

Zur Konvergenz der Reihen für die beiden Spuren vergleiche [Gilkey, 1.6]. Für zwei Elemente $A, B \in \Lambda_{x_0} TM$ wird im folgenden $A \stackrel{n}{=} B$ geschrieben, wenn ihre Anteile n -ten Grades übereinstimmen. Bei der späteren Integration über M interessieren ja nur die Anteile in $\Lambda^n TM$. Zu zeigen ist nun

LOKALER INDEXSATZ 6.6. *Es gilt für $x \in M$*

$$\lim_{t \searrow 0} \text{Tr}_s k(t, x, x) \, d\text{vol}|_x \stackrel{n}{=} (\hat{A}(TM \otimes \mathbf{C}) \wedge \text{ch}(\xi))|_x.$$

Dieser Satz ist eine rein lokale Aussage und verlangt somit nicht das globale Vorhandensein einer Spinstruktur. Mit der Wahl $\xi := S \otimes \xi'$ erhält man den lokalen Hirzebruch-Signatursatz für den mit ξ' getwisteten Signaturkomplex ([Roe, S. 148ff]). Ähnlich folgen der lokale Satz von Gauß-Bonnet und von Riemann-Roch.

Aus dem globalen Satz für den getwisteten Signatur-Komplex folgt das globale Atiyah-Singer-Indextheorem für alle elliptischen Differentialoperatoren. Siehe dazu [Atiyah-Bott-Patodi].

7. Der stochastische Beweis

7.1. Die Weitzenböck-Formel

Sei $\Delta^H = \nabla^* \nabla = \sum_j ((\nabla_j)^2 - \nabla_{\nabla_j e_j})$ der horizontale Laplace-Operator auf $S \otimes \xi$. Seien \tilde{R} , R und L die Krümmungstensoren von $S \otimes \xi$, TM und ξ . Dann gilt für ein lokales ON-Bein $(e_j)_j$ mit $\nabla_j e_k|_x = 0$ und $[e_j, e_k]|_x = 0$ am Punkt x :

$$\begin{aligned} D^2 &= \sum_{j,k} e_j \nabla_j (e_k \nabla_k) \\ &= \sum_{j,k} e_j e_k \nabla_j \nabla_k \\ &= - \sum_j (\nabla_j)^2 + \sum_{j < k} e_j e_k (\nabla_j \nabla_k - \nabla_k \nabla_j) \\ &= - \Delta^H + \sum_{j < k} e_j e_k \tilde{R}(e_j, e_k) \end{aligned}$$

(Weitzenböck-Formel). Diese Formel ist wegen der Symmetrien der Krümmung invariant unter einem Wechsel der ON-Basis. Nun gilt

$$\tilde{R}(e_j, e_k) = \sigma^* R(e_j, e_k) \otimes 1 + 1 \otimes L(e_j, e_k).$$

Mit Hilfe der Rechenregeln für Cliffordalgebren und der ersten Bianchi- Identität berechnet man (vgl. [Roe, 10.29])

$$\sum_{j < k} e_j e_k \sigma^* R(e_j, e_k) = \sum_{\substack{j < k \\ l, m}} e_j e_k \left(-\frac{1}{4} R_{lmjk} e_l e_m\right) = -\frac{1}{2} \sum_{j,k} e_j e_k \text{Ric}_{jk} = \frac{1}{4} \kappa,$$

wobei κ die Skalarkrümmung von TM ist. Insgesamt folgt also

$$D^2 = -\Delta^H + \frac{1}{4} \kappa \otimes 1 + \frac{1}{2} \sum_{j,k} e_j e_k \otimes L(e_j, e_k).$$

Man kann nun die Wärmeleitungsgleichung für den Laplace-Operator mit Hilfe der Brownschen Bewegung lösen und dann mit einer Formel vom Feynman-Kac-Typ die Lösung für $-D^2$ daraus entwickeln.

7.2. Stochastische Parallelverschiebung

Sei \mathbf{U}_ξ das zu ξ gehörige $\mathbf{U}(n_0)$ -Prinzipalbündel, dann ist die Whitney-Summe $\mathbf{Spin}(M) \times \mathbf{U}_\xi$ das $\mathbf{Spin} \times \mathbf{U}$ -Prinzipalbündel zu $S \otimes \xi$, $\tilde{\pi}$ sei die kanonische Projektion auf $\mathbf{SO}(M)$. $\tilde{L}(v)$ sei der horizontale Lift des kanonischen horizontalen Vektorfeldes $L(v)$ für $v \in \mathbf{R}^n$ nach $\mathbf{Spin}(M) \times \mathbf{U}_\xi$.

(x_t) sei die Brownsche Bewegung auf M , (u_t) ein horizontaler Lift nach $\mathbf{SO}(M)$. $\tilde{u}_t \in (\mathbf{Spin}(M) \times \mathbf{U}_\xi)_{x_t}$ sei definiert durch

$$d\tilde{u} = \tilde{L}(dw)|_{\tilde{u}}.$$

Für den Anfangswert gelte $\tilde{\pi}(\tilde{u}_0) = u_0$. Dann folgt nach der Stratonovich-Formel $\tilde{\pi}(\tilde{u}_t) = u_t$.

DEFINITION: Der **Paralleltransport** von $(S \otimes \xi)_{x_t}$ nach $(S \otimes \xi)_{x_0}$ längs (x_t) wird definiert durch

$$\tau_t := \tilde{u}_0 \tilde{u}_t^{-1}.$$

τ ist natürlich unabhängig von der Wahl von \tilde{u}_0 .

LEMMA 7.1. Für $f \in \Gamma(S \otimes \xi)$ gilt

$$d\tau f(x) = \tau \nabla_{dx} f = \tau (\nabla_{\delta x} f + \frac{1}{2} \Delta^H f dt).$$

Beweis: Es gilt mit $*$ als horizontalem Lift auf $\mathbf{Spin}(M) \times \mathbf{U}_\xi$

$$\begin{aligned} d\tilde{u}_t^{-1} f(x_t) &= \tilde{L}(dw_t)|_{\tilde{u}_t} (\tilde{u}_t^{-1} f(x_t)) \\ &= \sum_j (u \cdot \mathbf{e}_j)^* (\tilde{u}_t^{-1} f(x_t)) dw_t^j \\ &= \sum_j \tilde{u}_t^{-1} \nabla_{u \cdot \mathbf{e}_j} f(x_t) dw_t^j \\ &= \tilde{u}_t^{-1} \nabla_{dx_t} f(x_t) \\ &= \sum_j \tilde{u}_t^{-1} \nabla_{u \cdot \mathbf{e}_j} f(x_t) \delta w_t^j + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \tilde{u}_t^{-1} \nabla(\nabla f)(u \cdot \mathbf{e}_j, u \cdot \mathbf{e}_k) dw_t^j dw_t^k \\ &= \tilde{u}_t^{-1} (\nabla_{\delta x_t} f(x_t) + \frac{1}{2} \Delta^H f(x_t) dt). \end{aligned}$$

Multiplikation mit \tilde{u}_0 liefert die gewünschten Ergebnisse. Man beachte, daß die Itô-Formel hier auf Prozesse in dem Vektorraum $\tilde{S} \otimes \mathbf{C}^{n_0}$ angewandt wird. \square

Genauso folgt für $f \in C^\infty(M \times \mathbf{R}, S \otimes \xi)$

$$d\tau f(x, t) = \tau(\nabla_{\delta x} f + (\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta^H)f dt).$$

Insbesondere erhält man also mit $f_0 \in \Gamma(S \otimes \xi)$ für

$$f(x, t) := e^{(1-t)\frac{1}{2}\Delta^H} f_0(x)$$

durch Erwartungswertbildung $f(x_0, 0) = E_{x_0}[\tau_1 f_0(x_1)]$, allgemein gilt genauso

$$e^{\frac{1}{2}t\Delta^H} f_0(x_0) = E_{x_0}[\tau_t f_0(x_t)].$$

Anschaulich bedeutet das:

Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung im Punkt x_0 zur Zeit t erhält man, indem man die Brownschen Pfade bis zum Zeitpunkt t betrachtet, dort den Wert der Startfunktion bildet, diesen entlang des Pfades zum Ursprung zurückschiebt und den Mittelwert betrachtet.

7.3. Feynman-Kac-Formel

Sei $C := -\frac{1}{2}(D^2 + \Delta^H)$. Analog zur euklidischen Situation versucht man einen Ansatz der Form

$$e^{-\frac{1}{2}tD^2} f_0(x_0) = e^{t(\frac{1}{2}\Delta^H + C)} f_0(x_0) = E_{x_0}[Z_t \tau_t f_0(x_t)]$$

mit $Z_t \in C^1(\mathbf{R}^+, \text{End}(S \otimes \xi)_{x_0})$. Nach der Differentialgleichung für $\tau f_0(x)$ folgt

$$dZ_t \tau_t f_0(x_t) = (Z'_t \tau_t f_0(x_t) + \frac{1}{2} Z_t \tau_t \Delta^H f_0(x_t)) dt + Z_t \tau_t \nabla_{\delta x_t} f_0(x_t).$$

Man erhält also die Bedingung $Z'_t = Z_t \tau_t C|_{x_t} \tau_t^{-1}$ und $Z_0 = Id$. Zerlegung bezüglich der Summanden von C mit dem Ansatz $Z = \alpha \cdot U$, $\alpha \in C^1(\mathbf{R}^+)$, $U \in C^1(\mathbf{R}^+, \text{End}(S \otimes \xi)_{x_0})$ führt auf die Gleichungen

$$\alpha'_t = -\frac{1}{8} \alpha_t \kappa(x_t) \quad , \text{d.h.} \quad \alpha_t = e^{-\frac{1}{8} \int_0^t \kappa(x_s) ds} \quad \text{und}$$

$$U'_t = -\frac{1}{4} U_t \tau_t \left(\sum_{j,k} e_j e_k \otimes L|_{x_t}(e_j, e_k) \right) \tau_t^{-1}$$

mit $U_0 = Id$, wobei $(e_j)_j$ irgendein ON-Bein an der Stelle x_t sei. Die Wahl $e_j := u_t \mathbf{e}_j$ liefert

$$U'_t = -\frac{1}{4} U_t \sum_{j,k} (u_0 \mathbf{e}_j)(u_0 \mathbf{e}_k) \otimes \tau_t^\xi L(u_t \mathbf{e}_j, u_t \mathbf{e}_k) (\tau_t^\xi)^{-1}.$$

7.4. Zeitumparametrisierung

Um die verwendeten stochastischen Prozesse einfachen analytischen Verfahren zugänglicher zu machen, ist es notwendig, die Differentialgleichungen ein wenig zu ändern. Die Brownsche Bewegung wird nicht mehr bis zu verschiedenen Zeitpunkten betrachtet. Stattdessen wird immer dasselbe Stück eine Brownsche Bewegung mit verschiedenen Verkleinerungsfaktoren multipliziert. Dabei wird ausgenutzt, daß für eine Brownsche Bewegung (w_t) und $\varepsilon \in \mathbf{R}$ der umskalierte Prozeß $(\frac{1}{\varepsilon}w_{\varepsilon^2 t})$ wieder eine Brownsche Bewegung ist. Deshalb gilt

LEMMA 7.2. *Die Lösungen der Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned} du^\varepsilon &= \varepsilon L(dw)|_{u^\varepsilon}, \\ (\alpha^\varepsilon)' &= -\frac{\varepsilon^2}{8} \alpha \kappa(x^\varepsilon) \quad \text{und} \\ (U^\varepsilon)' &= -\frac{\varepsilon^2}{2} U^\varepsilon \sum_{j < k} (u_0 \mathbf{e}_j)(u_0 \mathbf{e}_k) \otimes \tau^{\xi, \varepsilon} L|_{x^\varepsilon}(u^\varepsilon \mathbf{e}_j, u^\varepsilon \mathbf{e}_k) (\tau^{\xi, \varepsilon})^{-1} \end{aligned}$$

mit denselben Anfangsbedingungen wie u , α und U haben zur Zeit 1 dieselben Verteilungen wie u_{ε^2} , α_{ε^2} und U_{ε^2} . Es gilt für wie oben definiertes x^ε und τ^ε

$$dx^\varepsilon = \varepsilon u^\varepsilon dw \quad \text{und} \quad d\tau^\varepsilon f(x^\varepsilon) = \tau^\varepsilon \nabla_{dx^\varepsilon} f(x^\varepsilon).$$

Ab dieser Stelle werden ausnahmslos nur noch die mit ε umparametrisierten Prozesse verwendet. Sie werden deshalb der Übersicht halber häufig, ohne das Verwechslungen zu befürchten sind, mit (u_t) , (x_t) etc. bezeichnet werden.

7.5. Darstellung des Kernes

Sei $p(t, x_0, y)$ die Dichte der Brownschen Bewegung (x_t^1) , d.h. der Wärmeleitungskern für den halben Laplace-Beltrami-Operator. Dann folgt mit $\varepsilon^2 = t$

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2}tD^2} f(x_0) &= \int_M k(t, x_0, y) f(y) dy \\ &= \int_M E_{x_0} [Z_t^1 \tau_t^1 f(x_t^1) | x_t^1 = y] p(t, x_0, y) dy \\ &= \int_M E_{x_0} [Z_1^\varepsilon \tau_1^\varepsilon f(x_1^\varepsilon) | x_1^\varepsilon = y] p(\varepsilon^2, x_0, y) dy \end{aligned}$$

Leider kann man nun, um $k(t, x_0, x_0)$ zu berechnen, nicht einfach $f(y)$ aus der bedingten Erwartung herausmultiplizieren, da $Z_1 \tau_1 \in \text{Hom}((S \otimes \xi)_{x_1}, (S \otimes \xi)_{x_0})$ für verschiedene $\omega \in \Omega$ Werte in verschiedenen Vektorräumen annimmt. Dieses Problem kann man lösen, indem man x darauf konditioniert, zur Zeit 1 in y zu sein (Brownsche Brücke). Dann

muß man aber mit einem komplizierteren Operator als $\frac{1}{2}\Delta$ arbeiten (siehe für diese Methode [Azencott]). Hier wird eine andere Konstruktion ähnlich [Leandre] durchgeführt, die allerdings Hilfsmittel aus dem Malliavin-Kalkül benötigt.

Um den Endpunkt x_1^ε der Brownschen Bewegung mit dem Startpunkt zu verbinden, wird die Kurve $\sigma : \eta \mapsto x_1^\eta$ für $\eta \leq \varepsilon$ betrachtet. σ ist eine C^∞ -Kurve von x_1 nach x_0 . Sei dann $\hat{\tau}^\varepsilon$ die Parallelverschiebung längs σ bis x_1^ε und der anschließenden Brownschen Bewegung. Da auf $\{x_1 = x_0\}$ $\hat{\tau}$ und τ übereinstimmen, gilt für den Wärmeleitungskern k



$$k(\varepsilon^2, x_0, x_0) = E_{x_0}[Z_1 \hat{\tau} | x_1 = x_0] p(\varepsilon^2, x_0, x_0).$$

BEMERKUNG: Leandre verwendet hier eine kompliziertere Konstruktion, bei der die Mannigfaltigkeit zunächst in einen höherdimensionalen euklidischen Raum eingebettet wird. Dann verbindet er den Endpunkt der Brownschen Bewegung über eine Geodätische mit dem Startpunkt. Durch Multiplikation mit einer geeigneten Testfunktion werden Brownsche Bewegungen, die im Schnittpunkt enden, ignoriert.

LEMMA 7.3. Für den Grenzwert der Superspür des Kernes gilt

$$\lim_{t \searrow 0} \text{Tr}_s k(t, x_0, x_0) = (2\pi)^{-k_0} E_{x_0} \left[\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^{-n} \text{Tr}_s (U_1^\varepsilon \hat{\tau}^\varepsilon) | w_1 = 0 \right].$$

BEMERKUNG: An dieser Stelle wird der Malliavin-Kalkül verwendet. Natürlich ist dieser Kalkül ein sehr viel mächtigeres und tiefliegenderes Hilfsmittel als die Brownsche Brücke; er wird hier vorgezogen, weil er ein anschaulich leicht faßbares Regularitätsergebnis anstelle der umständlichen Rechnungen mit dem erzeugenden Operator der Brownschen Brücke liefert. Für die umfangreichen Teilbeweise wird auf [Ikeda-Watanabe] verwiesen.

Beweis: (vergleiche [Ikeda-Watanabe, Th. V.10.6]) x_1^ε ist wegen der linearen Unabhängigkeit der $L(\mathbf{e}_j)$ ein nicht-degeneriertes Wiener-Funktional ([Ikeda-Watanabe, Th. V.10.2]). Sei $\varphi : M \rightarrow \mathbf{R}^n$ eine C^∞ -Abbildung, die auf einer Umgebung U von x_0 injektiv ist mit $\varphi(x_0) = 0$ und $\varphi'(x_0)^{-1} \in \mathbf{SO}_{x_0}(M)$. Wegen der Elliptizität des Laplace-Beltrami-Operators sind die Funktionale $\frac{1}{\varepsilon} \varphi(x_1^\varepsilon)$ gleichmäßig nicht-degeneriert ([Ikeda-Watanabe, Th. V.10.5]). Sei $\psi : M \rightarrow \mathbf{R}$ mit $\text{supp } \psi \subset U$ in einer Umgebung von x_0 konstant 1. Es folgt

$$\begin{aligned} \text{Tr}_s k(\varepsilon^2, x_0, x_0) &= E_{x_0} [\delta_{x_0}(x_1^\varepsilon) \alpha_1^\varepsilon \text{Tr}_s (U_t^\varepsilon \hat{\tau}^\varepsilon)] \\ &= E_{x_0} \left[\delta_0(\varphi(x_1^\varepsilon)) \psi(x_1^\varepsilon) \alpha_1^\varepsilon \text{Tr}_s (U_1^\varepsilon \hat{\tau}^\varepsilon) \right] \\ &= E_{x_0} \left[\delta_0\left(\frac{\varphi(x_1^\varepsilon)}{\varepsilon}\right) \psi(x_1^\varepsilon) \varepsilon^{-n} \alpha_1^\varepsilon \text{Tr}_s (U_1^\varepsilon \hat{\tau}^\varepsilon) \right]. \end{aligned}$$

Also gilt für den Limes, wenn die entstehenden Grenzwerte glatt sind (was in 7.7 gezeigt wird)

$$\begin{aligned} \lim_{t \searrow 0} \operatorname{Tr}_s k(t, x_0, x_0) &= E_{x_0} \left[\delta_0(\partial_\varepsilon x_1^0) \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^{-n} \alpha_1^\varepsilon \operatorname{Tr}_s(U_1^\varepsilon \hat{\tau}^\varepsilon) \right] \\ &= E_{x_0} \left[\delta_0(\partial_\varepsilon x_1^0) \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^{-n} \operatorname{Tr}_s(U_1^\varepsilon \hat{\tau}^\varepsilon) \right] \quad (\text{da } \alpha_1^0 = 1). \end{aligned}$$

” ∂_ε ” bezeichnet die Ableitung nach ε . Durch Ableiten der Differentialgleichung für x bei $\varepsilon = 0$ entsteht $d\partial_\varepsilon x^0 = u_0 dw$, also $\partial_\varepsilon x^0 = u_0 w$ (insbesondere ist $\partial_\varepsilon x_1^0$ nicht-degeneriert). w hat bei 0 die Dichte $(2\pi)^{-k_0}$, es folgt das Lemma. \square

7.6. Stochastische Zerlegung

Um den Endomorphismus U in zwei Komponenten aus $\operatorname{End}(S)$ bzw. $\operatorname{End}(\xi)$ aufzuspalten, benutzt man folgendes allgemeines Prinzip:

Seien A, B hermitesche Vektorräume, J eine endliche Indexmenge,

$\varphi^j \in C([0, 1], \operatorname{End} A)$, $\psi^j \in C([0, 1], \operatorname{End} B)$ für $j \in J$. W_t sei Brownsche Bewegung auf \mathbf{R}^J . $H_t \in \operatorname{End}(A \otimes B)$ sei die Lösung der (deterministischen) Differentialgleichung

$$H'_t = H_t \sum_{j \in J} \varphi_t^j \otimes \psi_t^j, \quad H_0 = Id_{A \otimes B}.$$

$H_t^A \in \operatorname{End}(A)$ und $H_t^B \in \operatorname{End}(B)$ seien die Lösungen der stochastischen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} dH_t^A &= H_t^A \sum_{j \in J} \varphi_t^j \delta W_t^j \quad \text{und} \\ dH_t^B &= H_t^B \sum_{j \in J} \psi_t^j \delta W_t^j \end{aligned}$$

mit $H_0^A = Id_A$ und $H_0^B = Id_B$. Dann gilt

LEMMA 7.4. $H_t = E[H_t^A \otimes H_t^B]$.

Beweis: $d(H^A \otimes H^B) = (H^A \sum \varphi^j \delta W^j) \otimes H^B + H^A \otimes (H^B \sum \psi^j \delta W^j) + dH^A \otimes dH^B$. Die ersten beiden Summanden verschwinden als Martingale bei der Erwartungswertbildung. Der Rest wird zu

$$\begin{aligned} dH^A \otimes dH^B &= (H^A \sum \varphi^j \delta W^j) \otimes (H^B \sum \psi^j \delta W^j) \\ &= (H^A \otimes H^B) \sum_{j,k} (\varphi^j \otimes \psi^k) d\langle W^j, W^k \rangle \\ &= (H^A \otimes H^B) \sum_j (\varphi^j \otimes \psi^j) dt. \end{aligned}$$

□

Sei für die Anwendung auf U aus 7.3 der Prozeß W eine Brownsche Bewegung auf $\mathfrak{so}(n) \cong \mathbf{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Der Erwartungswert bezüglich dieser zweiten Brownschen Bewegung werde mit \tilde{E} bezeichnet. Dann gilt

$$U_t = \tilde{E}[U_t^S \otimes U_t^\xi]$$

mit $U_t^S \in \text{End}(S_{x_0})$, $U_t^\xi \in \text{End}(\xi_{x_0})$ definiert durch

$$\begin{aligned} dU^S &= -\frac{\varepsilon^2}{2} U^S \sum_{j < k} (u_0 \mathbf{e}_j)(u_0 \mathbf{e}_k) \delta W^{jk} && \text{bzw.} \\ dU^\xi &= U^\xi \sum_{j < k} \tau^\xi L_x(u \mathbf{e}_j, u \mathbf{e}_k) (\tau^\xi)^{-1} \delta W^{jk}. \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $U_0^S = Id_{S_{x_0}}$, $U_0^\xi = Id_{\xi_{x_0}}$. Man beachte die unterschiedliche Abhängigkeit von ε , die so gewählt ist, daß für $L = 0$ $U^\xi = Id_{\xi_{x_0}}$ bleibt.

Wegen $\text{Tr}_s(A \otimes B) = \text{tr}_s A \cdot \text{tr} B := (\text{tr} A^+ - \text{tr} A^-) \text{tr} B$ für $A^\pm \in \text{End}(S_{x_0}^\pm)$, $A := A^+ \oplus A^-$ und $B \in \text{End}(\xi_{x_0})$ folgt somit

$$\text{Tr}_s(U \hat{\tau}) = \tilde{E}[\text{tr}_s(U^S \hat{\tau}^S) \text{tr}(U^\xi \hat{\tau}^\xi)].$$

Also erhält man

$$\lim_{t \searrow 0} \text{Tr}_s k(t, x_0, x_0) = (2\pi)^{-k_0} E \left[\tilde{E} \left[\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^{-n} \text{tr}_s(U_1^S \hat{\tau}^S) \text{tr}(U_1^\xi \hat{\tau}^\xi) \right] \middle| w_1 = 0 \right].$$

7.7. Fantastic Cancellations

Das folgende Lemma zeigt, daß sich der problematische Faktor ε^{-n} bei der Limesbildung bereits mit dem Faktor für das Spinorbündel alleine aufhebt, wenn letzterer nach ε differenzierbar ist. Tatsächlich genügt es, die erste Ableitung des Endomorphismusses zu betrachten, dessen Superspur dort gebildet wird. Vielleicht ist diese Formel die beste Erklärung für die "Fantastic Cancellations", die McKean und Singer vermuteten und Patodi fand.

LEMMA 7.5. *Sei g eine C^1 -Kurve in $\mathbf{Spin}(n)$, $g(0) = 1$. Dann gilt*

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^{-n} \text{tr}_s g(\varepsilon^2) = i^{-k_0} Pf(g'(0)).$$

Beweis: g läßt sich in der Form

$$g(t) = e_{\text{Cliff}(n)}^{\sum_{j=1}^{k_0} \frac{\theta_j(t)}{2} \mathbf{e}_{2j-1}(t) \mathbf{e}_{2j}(t)} = \prod_{j=1}^{k_0} \left(\cos \frac{\theta_j(t)}{2} + \mathbf{e}_{2j-1}(t) \mathbf{e}_{2j}(t) \sin \frac{\theta_j(t)}{2} \right)$$

mit einer geeigneten differenzierbaren Basis $(\mathbf{e}_j(t))$ von \mathbf{R}^n und differenzierbaren Winkeln $\theta_j(t)$ darstellen. Man berechnet nun $\mathrm{tr}_s g(t) = \mathrm{tr} \tau g(t) = \prod \frac{2}{i} \sin \frac{\theta_i(t)}{2}$ (siehe [Atiyah-Bott], [Hsu]), also

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^{-n} \mathrm{tr}_s g(\varepsilon^2) = i^{-k_0} \prod \theta'_j(0) = i^{-k_0} Pf(g'(0)).$$

□

Sei \tilde{u}_0 einer der beiden Lifts von u_0 nach $\mathbf{Spin}(M)$. Das Element $\tilde{u}_0^{-1} U_t^S \tilde{u}_0 \in \mathrm{End}(\tilde{S})$ liegt zwar i.a. nicht in $\mathbf{Spin}(n)$, unterscheidet sich aber von einem solchen nur um einen unwesentlichen Faktor:

Umschreiben der Differentialgleichung auf Stratonovich-Form ergibt mit $e_i := u_0 \mathbf{e}_i$:

$$\begin{aligned} dU^S &= -\frac{\varepsilon^2}{2} U^S \sum_{j < k} e_j e_k \delta W^{jk} \\ &= -\frac{\varepsilon^2}{2} U^S \sum_{j < k} e_j e_k dW^{jk} + \frac{\varepsilon^4}{8} U^S \sum_{\substack{j < k \\ l < m}} (e_j e_k)(e_l e_k) d\langle W^{jk}, W^{lm} \rangle \\ &= -\frac{\varepsilon^2}{2} U^S \sum_{j < k} (\tilde{u}_0 \mathbf{e}_j \tilde{u}_0^{-1})(\tilde{u}_0 \mathbf{e}_k \tilde{u}_0^{-1}) dW^{jk} + \frac{\varepsilon^4}{8} U^S \sum_{j < k} (e_j e_k)^2 dt \\ &= -\frac{\varepsilon^2}{2} U^S \sum_{j < k} \tilde{u}_0 \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \tilde{u}_0^{-1} dW^{jk} - \frac{\varepsilon^4 n(n-1)}{16} U^S dt \\ &= -\varepsilon^2 U^S \tilde{u}_0 dW \tilde{u}_0^{-1} - \frac{\varepsilon^4 n(n-1)}{16} U^S dt, \end{aligned}$$

wobei $W \in \mathfrak{so}(n)$ in der letzten Zeile als Endomorphismus von \tilde{S} betrachtet wird. Diese Differentialgleichung läßt sich leicht explizit lösen:

$$U_t^S = e^{\frac{\varepsilon^4 n(1-n)}{16} t} \tilde{u}_0 e_{\mathrm{Cliff}(n)}^{-\varepsilon^2 W_t} \tilde{u}_0^{-1},$$

also

$$U_1^S = e^{\frac{\varepsilon^4 n(1-n)}{16}} \tilde{u}_0 (Id - \varepsilon^2 W_1 + o(\varepsilon^2)) \tilde{u}_0^{-1}.$$

Man beachte, daß die Exponentialfunktion in der Clifford-Algebra angewandt auf \mathbf{spin} der differentialgeometrischen Exponentialfunktion auf \mathbf{Spin} entspricht.

Auch die Ableitung der Parallelverschiebung auf dem Spinorbündel $\hat{\tau}^S$ existiert:

LEMMA 7.6. (vergleiche [Bishop-Crittenden, 6.1.7]) Es gilt

$$\hat{\tau}^S = \tilde{u}_0 (Id - \varepsilon^2 \mu + o(\varepsilon^2)) \tilde{u}_0^{-1}$$

mit

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \omega \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} u_1^0 \right) = \frac{1}{2} \int_0^1 \Omega_{u_0}(L(dw), L(w)),$$

wobei ω die Zusammenhangsform ist.

BEMERKUNG: $\Omega_{u_0}(\cdot, \cdot)$ ist eine schiefsymmetrische Bilinearform. Also ist für $n = 2$ μ proportional zum Flächeninhalt von w verbunden mit einer Strecke von w_1 nach 0.

Der Beweis dieser Formel ist der schwierigste Teil im stochastischen Beweis des Indextheoremes. Er ist der wesentliche Punkt, in dem sich die auf [Bismut(2)] folgenden Beweise von ihrem Vorbild unterscheiden. Die Zufallsvariable μ wird sich sehr direkt in das \hat{A} -Geschlecht verwandeln. Im hier dargestellten Ansatz wurde die Parallelverschiebung mit Hilfe des Malliavin-Kalküls so verändert, daß sich die zweite Ableitung jetzt einfach ausrechnen läßt:

Beweis: Sei $g(\varepsilon) := \tilde{\pi}(\tilde{u}_0^{-1} \hat{\tau}^\varepsilon \tilde{u}_0)$. Die Kurve $\varepsilon \mapsto u_1^\varepsilon$ in $\mathbf{SO}(M)$ ist i.a. kein horizontaler Lift der Kurve $\sigma : \varepsilon \mapsto x_1^\varepsilon$, gibt also nicht direkt die Parallelverschiebung an. Durch Multiplikation mit g erhält man aber einen horizontalen Lift $u_1^\varepsilon g(\varepsilon)$, also gilt mit R als Rechtsmultiplikation auf $\mathbf{SO}(n)$

$$(R_{g(\varepsilon)^{-1}})_* g'(\varepsilon) = -\omega(\partial_\varepsilon u_1^\varepsilon)$$

([Bishop-Crittenden, 5.2]) und bei $\varepsilon = 0$ $g'(0) = -\omega(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} u_1^0)$. Sei nun $\bar{\nabla} : T\mathbf{SO}(M) \times \Gamma(T\mathbf{SO}(M)) \rightarrow T\mathbf{SO}(M)$ ein Zusammenhang mit $\bar{\nabla}\omega = 0$. \bar{T} und \bar{R} seien die zugehörigen Torsions- und Krümmungstensoren. Durch kovariantes Differenzieren der Differentialgleichung für u aus 7.4 nach ε folgt

$$\frac{\bar{\nabla}}{\partial \varepsilon} du = L(dw)|_u + \varepsilon \frac{\bar{\nabla}}{\partial \varepsilon} L(dw)|_u.$$

Sei $\frac{\bar{\nabla}}{dt}$ das kovariante Stratonovich-Differential längs $t \mapsto u_t$; aus den in 5.1 genannten Gründen ist es problemlos genau wie die deterministische Ableitung längs einer Kurve definierbar. Es gilt

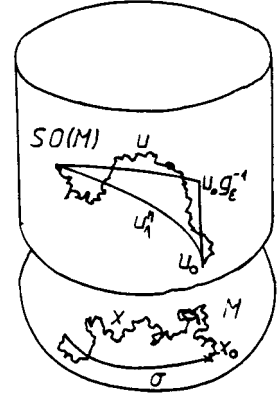
$$\frac{\bar{\nabla}}{\partial \varepsilon} du = \frac{\bar{\nabla}}{dt} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} u + \bar{T}(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} u, du),$$

also für $\varepsilon = 0$ wegen $du^0 = 0$ $d\frac{\partial}{\partial \varepsilon} u^0 = L(dw)|_{u^0}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} u^0 = L(w)|_{u^0}$ und damit $g'(0) = 0$. Also ist

$$\mu = -\frac{1}{2} g''(0) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \omega(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} u_1) = \frac{1}{2} \omega(\frac{\bar{\nabla}}{\partial^2 \varepsilon} u_1^0).$$

Weiteres Ableiten der Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} 2 \frac{\bar{\nabla}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} L(dw)|_u &= \frac{\bar{\nabla}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left(\frac{\bar{\nabla}}{dt} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} u + \bar{T}(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} u, du) \right) \\ (\text{da } du^0 = 0) &= d \frac{\bar{\nabla}}{\partial^2 \varepsilon} u^0 + \bar{R}(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} u^0, du^0) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} u^0 + \bar{T}(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} u^0, \frac{\bar{\nabla}}{\partial \varepsilon} du^0) \\ &= d \frac{\bar{\nabla}}{\partial^2 \varepsilon} u^0 + \bar{T}_{u^0}(L(w), L(dw)) \end{aligned}$$



([Klingenberg, 1.5.8]). Nach Wahl von $\bar{\nabla}$ ist die Ableitung horizontaler Vektorfelder horizontal, also $\omega\left(2\frac{\bar{\nabla}}{\partial\varepsilon}L(dw)\right) = 0$ und

$$\omega\left(\bar{T}(L(w), L(dw))\right) = \omega\left([L(dw), L(w)]\right) = -d\omega(L(dw), L(w)) = -\Omega(L(dw), L(w)),$$

somit

$$\mu = \frac{1}{2}\omega\left(\frac{\bar{\nabla}\partial}{\partial^2\varepsilon}u_1^0\right) = \frac{1}{2}\int_0^1\Omega_{u_0}(L(dw), L(w)).$$

□

Für die Indexdichte hat man jetzt also insgesamt die Formel

$$\begin{aligned}\lim_{t\searrow 0}k(t, x_0, x_0) &= (2\pi)^{-k_0}E\left[\tilde{E}\left[\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^{-n}e^{\frac{\varepsilon^4 n(1-n)}{16}}\operatorname{tr}_s(\tilde{u}_0e^{-\varepsilon^2W_1}\tilde{u}_0^{-1}\hat{\tau}^S)\operatorname{tr}U_1^\xi\hat{\tau}^\xi\right]\Big|w_1=0\right] \\ &= E\left[\tilde{E}\left[Pf\left(\frac{i}{2\pi}(W_1+\mu)\right)\operatorname{tr}U_1^\xi\Big|_{\varepsilon=0}\right]\Big|w_1=0\right].\end{aligned}$$

Das Bündel ξ wird in diesem Ausdruck nur noch durch $U_1^\xi|_{\varepsilon=0}$ repräsentiert. Diese Zufallsvariable ist von der Brownschen Bewegung w unabhängig:

Sei $\beta_t := U_t^\xi|_{\varepsilon=0}$; die Differentialgleichung für U^ξ wird zu

$$d\beta = \beta\sum_{i<j}L(e_i, e_j)\delta W^{ij},$$

enthält also nur noch W .

7.8. Trennen der beiden Brownschen Bewegungen

Nun gilt für $A, B \in \Lambda_{x_0}^2 TM$

$$Pf(A+B)e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \frac{1}{k_0!}(A+B)^{\wedge k_0} \stackrel{n}{=} e_\Lambda^{A+B} = e_\Lambda^A \wedge e_\Lambda^B.$$

Damit läßt sich die Formel für die Indexdichte in einen Erwartungswert für w und einen für die Hilfs-Brownsche Bewegung W zerlegen:

$$\lim_{t\searrow 0}k(t, x_0, x_0) dvol \stackrel{n}{=} E\left[e^{\frac{i}{2\pi}u_0\mu u_0^{-1}}\Big|w_1=0\right] \wedge \tilde{E}\left[e^{\frac{i}{2\pi}u_0W_1u_0^{-1}}\operatorname{tr}\beta_1\right].$$

Nun kann man zeigen, daß der erste Erwartungswert gleich der \hat{A} -Klasse von TM und der zweite gleich dem Chern-Charakter von ξ ist.

7.9. Der Erwartungswert bezüglich w

Die 2-Form $u_0\mu u_0^{-1}$ läßt sich etwas einfacher darstellen: Es ist für $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in T_{u_0}\mathbf{SO}(M)$ und ihre Projektionen v_1, v_2 auf TM

$$\begin{aligned} \langle u_0\Omega_{u_0}(L(dw), L(w))u_0^{-1}, v_1 \wedge v_2 \rangle &= - \langle u_0\Omega_{u_0}(L(dw), L(w))u_0^{-1}v_1, v_2 \rangle \\ &= - \langle R(u_0 dw, u_0 w)v_1, v_2 \rangle \\ &= \langle R(v_1, v_2)u_0 w, u_0 dw \rangle \\ &= \langle \Omega_{u_0}(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)w, dw \rangle. \end{aligned}$$

Also wird die charakteristische Klasse $E[\exp(\frac{i}{2\pi}u_0\mu u_0^{-1})|w_1 = 0]$ durch die Funktion

$$q : \mathfrak{so}(n) \rightarrow \mathbf{C}$$

$$A \mapsto E[e^{\frac{i}{4\pi} \int_0^1 \langle Aw, dw \rangle} | w_1 = 0]$$

bestimmt. In einer geeigneten Basis ist $A = \text{diag} \left(\begin{smallmatrix} 0 & \theta_k \\ -\theta_k & 0 \end{smallmatrix} \right)_{k=1}^{k_0}$. Dann ist

$$q(A) = \prod_{k=1}^{k_0} E[e^{\frac{i\theta_k}{4\pi} \int_0^1 (w^2 dw^1 - w^1 dw^2)} | w_1 = 0].$$

Dieser Ausdruck läßt sich nun mit einer Formel von Paul Lévy berechnen. Man beachte dazu $\int w^1 dw^2 = \int w^1 \delta w^2$. Sei

$$\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{x/2}{\sinh x/2}.$$

FLÄCHENFORMEL VON LÉVY 7.7. Für $\alpha \in \mathbf{R}$ gilt

$$E[e^{\frac{i\alpha}{2} \int_0^1 (w^2 dw^1 - w^1 dw^2)} | w_1 = 0] = \varphi(\alpha).$$

Beweis: (Skizze, vgl. [Ikeda-Watanabe, S. 474f]) Sei $r := |w|$, w 2-dimensionale Brownsche Bewegung. Über eine Zeittransformation zeigt man die Existenz einer von r unabhängigen Brownschen Bewegung B mit

$$\frac{1}{2} \int_0^t (w^2 dw^1 - w^1 dw^2) = B_{\frac{1}{4}} \int_0^t r_s^2 ds.$$

Wegen $E[\exp(i\alpha B_t)] = \exp(-\frac{\alpha^2 t}{2})$ (Fourier- Transformation der Gauß-Verteilung) wird obiger Erwartungswert zu

$$E[e^{-\frac{\alpha^2}{8} \int_0^1 r_t^2 dt} | r_1 = 0].$$

Verallgemeinernd betrachtet man für $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$

$$u : \mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$$

$$(t, x) \mapsto E\left[e^{-\frac{\alpha^2}{8} \int_0^t |x+w_t|^2 dt} f(x+w_t)\right].$$

Diese Funktion löst die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u - \frac{\alpha^2}{8} |x|^2 u$$

mit $u|_{t=0} = f$.

Den Kern p dieser Differentialgleichung kann man nun mit klassischen Methoden explizit berechnen und erhält so für den gesuchten Erwartungswert

$$E[u(1,0)|r_1 = 0] = 2\pi p(1,0,0) = \varphi(\alpha).$$

□

Somit ist $q(A) = \prod \varphi\left(\frac{i\theta_t}{2\pi}\right) = \sqrt{\det \varphi\left(\frac{i}{2\pi}A\right)}$, also

$$q(\Omega_{x_0}) = \hat{A}(\nabla^{TM \otimes \mathbf{C}})|_{x_0}.$$

7.10. Der Erwartungswert bezüglich W

Die Hilfs-Brownsche Bewegung W verschwindet genauso, wie sie entstanden ist. Sie wurde verwendet, um eine deterministische Differentialgleichung in zwei stochastische zu teilen. Jetzt werden zwei Lösungen stochastischer Gleichungen tensoriert, um eine explizit lösbare deterministische Gleichung für den Erwartungswert zu erhalten. Dank der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes kann man diese Konstruktion auf den hier gesuchten Erwartungswert anwenden.

Da $\bigoplus \Lambda^{2k} \mathbf{C}^n$ eine kommutative endlichdimensionale Algebra ist, kann man in ihr den normalen Itô-Kalkül anwenden. Es folgt für $\alpha \in \mathbf{C}$

$$de_\Lambda^{\alpha W} = \alpha e_\Lambda^{\alpha W} \wedge \delta W + \frac{1}{2} \alpha^2 e_\Lambda^{\alpha W} \wedge \sum_{j < k} (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k)^{\wedge 2} dt = \alpha e_\Lambda^{\alpha W} \wedge \sum_{j < k} \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k \delta W^{jk}.$$

Also erfüllt $H_t := \tilde{E}[e_\Lambda^{\alpha W} \otimes \beta]$ die Differentialgleichung $H' = H \cdot \alpha K$ mit

$$K := \sum_{j < k} \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k \otimes L(e_j, e_k),$$

d.h. $H_t = e_{\Lambda \otimes \mathbf{GL}(n_0, \mathbf{C})}^{t\alpha K}$.

Mit dem Vektorraum-Homomorphismus

$$\begin{aligned}\gamma : \Lambda \mathbf{R}^n \otimes \text{End}(\xi_{x_0}) &\rightarrow \Lambda T_{x_0} M \otimes \mathbf{C} \\ \varphi \otimes \psi &\mapsto (u_0 \varphi u_0^{-1}) \text{tr } \psi\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}\tilde{E}[e^{\frac{i}{2\pi} u_0 W_1 u_0^{-1}} \text{tr } \beta_1] &= \tilde{E}[\gamma(e^{\frac{i}{2\pi} W_1} \otimes \beta_1)] \\ &= \gamma(e^{\frac{i}{2\pi} K}) \\ &= \text{tr} \exp\left(\frac{i}{2\pi} \sum_{j < k} e_j \wedge e_k \otimes L(e_j, e_k)\right) \\ &= \text{tr} e^{\frac{i}{2\pi} L_{x_0}} \\ &= \text{ch}(\nabla^\xi)|_{x_0}.\end{aligned}$$

Also gilt

$$\lim_{t \searrow 0} k(t, x, x) \, d\text{vol} \stackrel{n}{=} (\hat{A}(TM \otimes \mathbf{C}) \wedge \text{ch}(\xi))|_x.$$

8.Literatur

- M. F. ATIYAH, R. BOTT, A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes II, Ann. of Math. 88 (1968), 451-491.
- M. F. ATIYAH, R. BOTT, V. K. PATODI, On the heat equation and the index theorem, Invent. Math. 19 (1973), 279-330.
- M. F. ATIYAH, R. BOTT, A. SHAPIRO, Clifford modules, Topology 3 (Supp. 1) (1964), 3-38.
- R. AZENCOTT, Une approche probabiliste du theoreme de l'indice (Atiyah-Singer), d'apres J.-M. Bismut, Seminaire Bourbaki 1984-1985, Asterisque 133-134 (1986), 7-18.
- N. BERLINE, M. VERGNE, A computation of the equivariant index of the Dirac operator, Bull. Soc. math. France 113 (1985), 305-345.
- R. L. BISHOP, R. J. CRITTENDEN, Geometry of manifolds, Academic Press, New York 1964.
- J. M. BISMUT, Mechanique aleatoire, Lect. Notes in Math. 866 (1981).
(2), The Atiyah-Singer theorems: a probabilistic approach I, J. Funct. Anal. 57 (1984), 56-98.
(3), Index theorem and the heat equation, Proc. Intern. Cong. Math., Berkeley (1986), 491-504.
- K. L. CHUNG, R. J. WILLIAMS, Introduction to stochastic integration, Birkhäuser
- A. FRIEDMAN, Stochastic differential equations and applications, Academic Press, London 1975
- E. GETZLER, A short proof of the Atiyah-Singer index theorem, Topology 25 (1988), 111-117.
- P. B. GILKEY, Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah- Singer index theorem, Wilmington, Publish or Perish 1984.
- P. HSU, Brownian motion and the Atiyah-Singer index theorem, to appear.

- N. IKEDA, S. WATANABE, Stochastic differential equations and diffusion processes, Amsterdam, North Holland 1981, 2. Edition 1989
(2), Malliavin calculus for Wiener functionals and its applications. In: D. Elworthy (ed.), From local time to global geometry, Montreal, Pitman 1986.
- I. KARATZAS, S. SHREVE, Brownian motion and stochastic calculus, Springer, New York 1988.
- W. KLINGENBERG, Riemannian geometry, de Gruyter, Berlin 1982.
- K. S. KOBAYASHI, K. NOMIZU, Foundations of differential geometry, Interscience Publishers, New York 1963.
- R. LEANDRE, Sur le theoreme d'Atiyah-Singer, Probab. Th. Rel. Fields 80 (1988), 119-137.
(2), Sur le theoreme de l'indice des familles, Seminaire de Strasbourg XXII, Lect. Notes in Math. 1321 (1985), 348-414.
- J. W. MILNOR, J. D. STASHEFF, Characteristic classes, Princeton University Press, Princeton 1974.
- J. ROE, Elliptic operators, topology and asymptotic methods, Pitman 1988.
- I. SHIGEKAWA, N. UEKI, A stochastic approach to the Riemann-Roch theorem, Osaka J. Math. 25 (1988), 759-784.