

Übungen zur Analysis 1
(WS 2021/22)
12. Übungsblatt (18.1.2022)

Abgabe der Lösungen bis Dienstag, 25.1.2022, 10:15 in die Übungsbriefkästen in 25.22.00.

Bitte denken Sie daran, jede Ihrer Aussagen zu beweisen.

Übung 12.1. a) Zeigen Sie Lemma 3.28 (6)

$$\cos z - \cos w = -2 \sin \frac{z+w}{2} \sin \frac{z-w}{2}, \quad \sin z - \sin w = 2 \cos \frac{z+w}{2} \sin \frac{z-w}{2}$$

durch Ausmultiplizieren der Definitionen auf der rechten Seite (in der Vorlesung ist bei der 2. Formel ein Schreibfehler passiert).

b) Folgern Sie daraus eine Formel für $\cosh x - \cosh y$ und $\sinh x - \sinh y$.
(10+10 Punkte)

Übung 12.2. a) Beweisen Sie $\sinh x > 0$ für alle $x > 0$.

b) Folgern Sie, dass \cosh auf \mathbf{R}^+ und $\sinh, \tanh := \frac{\sinh}{\cosh}$ auf \mathbf{R} streng monoton wachsend sind.

c) Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x$.
(5+10+10 Punkte)

Übung 12.3. Zeigen Sie, dass \cos und \sin auf $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ keine Nullstellen haben.
(15 Punkte)

Übung 12.4. Sei $\varphi \in \mathbf{R}^+$ und $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \varphi$.

a) Zeigen Sie $|e^{is} - e^{it}| = 2 \sin \frac{s-t}{2}$ für $s, t \in \mathbf{R}, 0 \leq s - t \leq 2\pi$.

b) Zeigen Sie $\sin t < t$ für $t \in \mathbf{R}^+$.

c) Setze $L := \sum_{k=0}^{n-1} |e^{it_{k+1}} - e^{it_k}|$ und $\varepsilon := \max_k (t_{k+1} - t_k)$. Beweisen Sie für $\varepsilon \leq 4$

$$\varphi - \frac{\varepsilon^2}{24} \varphi \leq L < \varphi.$$

(10+10+20 Punkte)

Die Werte $|e^{it_{k+1}} - e^{it_k}|$ geben den Abstand zweier Punkte auf dem Einheitskreis an. Somit ist L die Länge eines Streckenzugs im Kreis. Der Grenzwert von L für $\varepsilon \searrow 0$ läßt sich also als Länge des Kreissegments von 1 bis $e^{i\varphi}$ interpretieren, der Winkel zwischen diesen Punkten am Scheitelpunkt 0.