

Übungen zur Analysis 1
(WS 2021/22)
11. Übungsblatt (11.1.2022)

Abgabe der Lösungen bis Dienstag, 18.1.2022, 10:15 in die Übungsbriefkästen in 25.22.00.

Bitte denken Sie daran, jede Ihrer Aussagen zu beweisen.

Übung 11.1. a) Zeigen Sie die Stetigkeit der n -ten Wurzel $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbf{R}_0^+ \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ direkt mit der Definition (und z.B. mit Hilfe von Lemma 1.47) ohne Verwendung des Satzes über Stetigkeit der Inversen.

b) Zeigen Sie, dass $g :]0, 3[\rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto (\lfloor x \rfloor + 1)(x - 1)$ keine stetige Funktion ist. (12+8 Punkte)

Übung 11.2. a) Sei $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ stetig. Beweisen Sie, dass es ein $x \in [a, b]$ gibt mit $f(x) = x$ (ein solches x heißt Fixpunkt von f).

b) Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ gibt, die jeden ihrer Bildwerte genau zweimal annimmt. (10+15 Punkte)

Übung 11.3. Überprüfen Sie die Existenz folgender Grenzwerte und berechnen Sie sie gegebenenfalls

$$(a) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \quad (b) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 - 1}{x|x - 1|}, \quad (c) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \notin \{0, 1\}}} \frac{x^2 - 1}{x|x - 1|}, \quad (d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + |x - 1|}.$$

(8+7+8+7 Punkte)

Übung 11.4. Begründen Sie folgende Aussagen mit einem geeigneten sinnvollen mathematischen Modell:

a) Angenommen, zwei Radfahrer Anna und Bert verwenden denselben schmalen Fahrradweg zwischen X und Y . Anna fährt um 8:30 in X los und kommt um 11:00 in Y an. Bert fährt um 8:00 in Y ab und kommt um 11:30 in X an, weil er einmal etwas verliert und kurz umkehren muss. Dann müssen sich die beiden auf dem Weg begegnen sein.

b) Auf dem Äquator gibt es zwei antipodale Punkte, bei denen die Lufttemperatur zu einem fest gewähltem Zeitpunkt übereinstimmt.

(10+15 Punkte)