Übungen zur Analysis 1
(WS 2021/22)
10. Übungsblatt (21.12.2021)

Abgabe der Lösungen bis Dienstag, 11.1.2022, 10:15 in die Übungsbriefkästen in 25.22.O0.

Bitte denken Sie daran, jede Ihrer Aussagen zu beweisen.

Übung 10.1. *Beweisen Sie die Konvergenz oder Divergenz folgender Reihen:*

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+2)}{n\sqrt{n}}, \quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{5}-1\right)^n, \quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(3+(-1)^n)}{n}.$$

(7+9+9 Punkte)

Übung 10.2. *Zeigen Sie, dass die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *konvergiert und dass ihr Cauchy-Produkt mit sich selbst divergiert.* *(25 Punkte)*
(Tipp: Für den Nachweis der Divergenz können Sie z.B. Korollar 2.30 verwenden.)

Übung 10.3. *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ *die Folge der Fibonacci-Zahlen wie in Übung 6.3.*

a) Finden Sie eine Zahl r*, so dass zu* $z \in \mathbf{C}$ *die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

für $|z| < r$ *konvergiert und für* $|z| > r$ *divergiert.*

b) Setze $f : \{|z| < r \mid z \in \mathbf{C}\} \to \mathbf{C}$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. *Zeigen Sie* $f(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$. *(15+15 Punkte)*

Übung 10.4. *Seien* P, Q *reelle Polynome mit* $m := \deg Q = \deg P + 1$*, und für* $n \in \mathbf{N}_0$ *sei* $Q(n) \neq 0$. *Zeigen Sie, dass* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ *divergiert. (20 Punkte)*
(Tipp: Die Divergenz der harmonischen Reihe kann hier hilfreich sein.)

Frohes Fest und Guten Rutsch!