Übungen zur Analysis 1
(WS 2021/22)
9. Übungsblatt (14.12.2021)

Abgabe der Lösungen bis nächsten Dienstag, 21.12.2021, 10:15 in die Übungsbriefkästen in 25.22.O0.

Bitte denken Sie daran, jede Ihrer Aussagen zu beweisen.

Übung 9.1. *Seien $(a_n)_n, (b_n)_n$ konvergente Folgen in $\mathbf{R}$ mit Limes a bzw. b. Folgern Sie aus $a < b$, dass für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbf{N}_0$ gilt: $a_n < b_n$ (dies ist eine Art Umkehrung von Satz 2.10(5)).* *(25 Punkte)*

Übung 9.2. *Zeigen Sie, dass jede Folge $(a_n)_n$ in $\mathbf{R}$ eine monoton wachsende oder fallende Teilfolge hat.* *(25 Punkte)*

Übung 9.3. *Zeigen Sie: Wenn für eine Folge $(a_n)_n$ in $\mathbf{R}$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, so gilt dies auch für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$.* *(25 Punkte)*

Übung 9.4. *Sei $(a_n)_n$ eine monoton fallende Folge in $\mathbf{R}^+$, und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiere. Folgern Sie, dass $(na_n)_n$ eine Nullfolge ist.* *(25 Punkte)*

(Tipp: Wenden Sie das Cauchy-Kriterium an, um die Folge mit Hilfe von $a_{n+1}+\cdots+a_{2n}$ abzuschätzen. Behandeln Sie gerade und ungerade n getrennt).