

Übungen zur Analysis 1  
(WS 2021/22)  
8. Übungsblatt (7.12.2021)

Abgabe der Lösungen bis nächsten Dienstag, 14.12.2021, 10:15 in die Übungsbriefkästen in 25.22.00.

Bitte denken Sie daran, jede Ihrer Aussagen zu beweisen.

**Übung 8.1.** Sei  $b \in \mathbf{R}^+$ . Bestimmen Sie den Limes für  $n \rightarrow \infty$  für die Folgen

a)  $a_n := \sqrt[3]{n+b} - \sqrt[3]{n}$  für  $n \in \mathbf{Z}^+$

(Tipp: Dies kann ähnlich zu einem Beispiel aus der Vorlesung behandelt werden),

b)  $b_n := \frac{3n^5 - 5n^2 + 2}{2n^5 + 2n + 1}$  für  $n \in \mathbf{Z}^+$ ,

c)  $c_n := n^3/2^n$  für  $n \in \mathbf{N}_0$ . (10+10+10 Punkte)

**Übung 8.2.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}^+}$  eine Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $b_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$ . Zeigen Sie  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ . (20 Punkte)

**Übung 8.3.** Bestimmen Sie

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/\sqrt[n]{n!})$

(Tipp: Verwenden Sie die Abschätzung  $k \geq n/2$  für ca. die Hälfte der Zahlen  $k$  zwischen 1 und  $n$ ),

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n (1 - \frac{1}{k^2})$

(Tipp: Versuchen Sie, das Produkt zweier aufeinander folgender Faktoren zu vereinfachen). (15+15 Punkte)

**Übung 8.4.** Eine Folge  $(x_n)_n$  werde rekursiv definiert durch  $x_0 := 3$ ,  $x_{n+1} := \frac{2}{3}x_n + \frac{2}{x_n}$ . Beweisen Sie die Wohldefiniiertheit und die Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert. (20 Punkte)