

Übungen zur Analysis 1  
(WS 2021/22)  
7. Übungsblatt (30.11.2021)

Abgabe der Lösungen bis nächsten Dienstag, 7.12.2021, 10:15 in die Übungsbriefkästen in 25.22.00.

Bitte denken Sie daran, jede Ihrer Aussagen zu beweisen.

**Übung 7.1.** Zeigen Sie für alle  $n \in \mathbf{Z}^+$

$$2\sqrt{n+1} - 2 < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

(30 Punkte)

**Übung 7.2.** Zeigen Sie für alle  $k \in \mathbf{N}_0, x \in \mathbf{R}$

$$\binom{2k}{k} = (-4)^k \binom{-1/2}{k}, \quad \binom{-x}{k} = (-1)^k \binom{x+k-1}{k}.$$

(10+10 Punkte)

**Übung 7.3.** Zeigen Sie für alle  $n \in \mathbf{N}_0, x \in \mathbf{R}$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{x}{k} = (-1)^n \binom{x-1}{n}.$$

(25 Punkte)

**Übung 7.4.** a) Beweisen Sie  $(1+a)^n \geq \binom{n}{2} a^2$  für  $a \in \mathbf{R}^+, n \in \mathbf{Z}, n \geq 2$ .

b) Sei  $a_n := \sqrt[n]{n}$  für  $n \in \mathbf{Z}^+$ . Zeigen Sie  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ . (Tipp: Setzen Sie  $a_n - 1$  in Teil (1) ein). (5+20 Punkte)