

Übungen zur Analysis 1  
(WS 2021/22)  
6. Übungsblatt (23.11.2021)

Abgabe der Lösungen bis nächsten Dienstag, 30.11.2021, 10:15 in die Übungsbriefkästen in 25.22.00.

Bitte denken Sie daran, jede Ihrer Aussagen zu beweisen.

**Übung 6.1.** Sei  $M$  eine Menge. Beweisen Sie, dass die Potenzmenge  $\mathcal{P}(M)$  nicht abzählbar unendlich groß sein kann. (20 Punkte)

**Übung 6.2.** Seien  $n, m \in \mathbf{N}_0$  und  $\sqrt{n} \notin \mathbf{Q}$ . Folgern Sie  $\sqrt{n} + \sqrt{m} \notin \mathbf{Q}$ . (25 Punkte)

**Übung 6.3.** Eine Abbildung  $a : \mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{N}_0$  werde rekursiv durch  $a_0 := 0, a_1 := 1$  und  $a_{n+2} := a_{n+1} + a_n$  für  $n \in \mathbf{N}_0$  definiert. Zeigen Sie mit

$$x_1 := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), x_2 := \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}),$$

dass  $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^n - x_2^n)$ . (25 Punkte)

**Übung 6.4.** Bestimmen Sie folgende komplexe Zahlen möglichst vereinfacht in der Gestalt  $x + iy$  mit  $x, y \in \mathbf{R}$

a)  $\frac{2-i}{1+i}, (5-i)^2, (3+2i)^2,$

b) alle Lösungen  $z \in \mathbf{C}$  der Gleichung  $z^2 + (1-3i)z + i - 8 = 0$ . (Sie können mit der pq-Formel heuristisch vermuten, welches die Lösungen sind, und dann beweisen, dass sie welche sind. Dann bleibt noch zu zeigen, dass es keine weiteren Lösungen gibt.) (10+20 Punkte)