

Übungen zur Analysis 1
(WS 2021/22)
5. Übungsblatt (16.11.2021)

Abgabe der Lösungen bis nächsten Dienstag, 23.11.2021, 10:15 in die Übungsbriefkästen in 25.22.00.

Bitte denken Sie daran, jede Ihrer Aussagen zu beweisen.

Übung 5.1. *Beweisen Sie für $n \in \mathbf{N}_0$*

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \text{und} \quad \frac{4^n}{n+1} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

(10+15 Punkte)

Übung 5.2. *a) Sei $\emptyset \neq M \not\subset \mathbf{R}$ eine endliche oder abzählbar unendliche Menge. Beweisen Sie, dass es auf der Menge $M \cup \mathbf{R}$ keine die Körperaxiome erfüllende Addition $\tilde{+}$ und Multiplikation $\tilde{\cdot}$ gibt, die eingeschränkt auf \mathbf{R} die übliche Addition und Multiplikation ergeben.*

b) Sei $r \neq 0$ eine rationale Zahl und $x \in \mathbf{R}$ irrational. Zeigen Sie, dass $r + x$ und $r \cdot x$ irrational sind.

(15+10 Punkte)

Übung 5.3. *Zeigen Sie $\max\{\sup A, \sup B\} = \sup(A \cup B)$ für alle nach oben beschränkten Teilmengen $A, B \subset \mathbf{R}$.*

(25 Punkte)

Übung 5.4. *Sei $M \subset \mathcal{P}(\mathbf{N}_0)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von \mathbf{N}_0 . Zeigen Sie, dass M abzählbar ist.*

(25 Punkte)