Übungen zur Analysis 1

(WS 2021/22)

4. Übungsblatt (9.11.2021)

Abgabe der Lösungen bis nächsten Dienstag, 16.11.2021, 10:15 in die Übungsbriefkästen in 25.22.O0.

Bitte denken Sie daran, jede Ihrer Aussagen zu beweisen.

Übung 4.1. *Beweisen Sie für einen geordneten Körper K und $x, y \in K$ mit* $0 < x \leq y$

$$x^2 \leq \left(\frac{2xy}{x+y}\right)^2 \leq xy.$$

(30 Punkte)

Übung 4.2. *Sei K ein geordneter Körper und $M \subset K$ habe ein Infimum* $\inf M > 0$. *Zeigen Sie, dass $M^{-1} := \{\frac{1}{x} \,|\, x \in M\}$ ein Supremum hat mit* $\sup(M^{-1}) = (\inf M)^{-1}$. *(20 Punkte)*

Übung 4.3. *Überprüfen Sie die Existenz von Supremum, Infimum, Minima, Maxima folgender Teilmengen von $\mathbf{Q}$ und bestimmen Sie sie gegebenenfalls:*

a) $\{\frac{1}{2^k} + \frac{1}{n} \,|\, k, n \in \mathbf{Z}^+\}$.

b) $\left\{x \in \mathbf{Q} \,\middle|\, |3 - 2x| < 5\right\}$. *(15+10 Punkte)*

Übung 4.4. *Sei $\mathcal{P}(\mathbf{N}_0)$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbf{N}_0$ (vgl. Übung 3.1). Zeigen Sie, dass es keine Bijektion $f : \mathbf{N}_0 \to \mathcal{P}(\mathbf{N}_0)$ gibt.*
(Tipp: Betrachten Sie $M := \{n \in \mathbf{N}_0 \,|\, n \notin f(n)\}$). *(25 Punkte)*