

Übungen zur Analysis 1
(WS 2021/22)
3. Übungsblatt (2.11.2021)

Abgabe der Lösungen bis nächsten Dienstag, 9.11.2021, 10:15 in die Übungsbriefkästen in 25.22.00.

Wo es sinnvoll ist, dürfen Sie Beweise bei den Aufgaben 3.1 und 3.2 mit (ausreichend vielen) Venn-Diagrammen (mit klarer Beschriftung) führen.

Übung 3.1. Sei M eine Menge und $\mathcal{P}(M) := \{A \mid A \subset M\}$ die Potenzmenge von M , d.h. die Menge aller Teilmengen von M . Beweisen Sie, dass $(\mathcal{P}(M), +, \cdot)$ mit

$$A + B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) \quad \text{und} \quad A \cdot B := A \cap B$$

ein kommutativer Ring mit Eins ist. (30 Punkte)

Übung 3.2. Fortsetzung von Übung 3.1:

- a) Zeigen Sie für $A, B \subset M$, dass $M \setminus A = 1 + A$ und $A \cup B = A + B + A \cdot B$.
- b) Welche Elemente von $\mathcal{P}(M)$ haben einen Kehrwert? (10+10 Punkte)

Übung 3.3. Für einen Körper K , $x \in K$ und $n \in \mathbf{N}_0$ sei x^n rekursiv durch $x^0 := 1$, $x^{n+1} := x \cdot x^n$ definiert und das Summenzeichen als $\sum_{k=0}^{-1} f(k) := 0$, $\sum_{k=0}^n f(k) := f(n) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$. Zeigen Sie für $n \in \mathbf{N}_0$ und $x \neq 1$ mit Hilfe vollständiger Induktion

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

(20 Punkte)

Übung 3.4. Für einen geordneten Körper K sei der Betrag

$$\begin{aligned} |\cdot| : K &\rightarrow K, \\ x &\mapsto \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Zeigen Sie für alle $x, y, z \in K$

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad |x - z| \leq |x - y| + |y - z| \quad \text{und} \quad \left| |x| - |y| \right| \leq |x - y|$$

(Tipp zur ersten Ungleichung: Quadrieren Sie beide Seiten). (10+10+10 Punkte)