

Abgabe: bis Montag 19.6.2023, vor der Vorlesung

Vorlesungswebseite: <http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/zt2/>

Aufgabe 1 (4 Punkte): $L(1, \chi)$ -Berechnung

Berechnen Sie $L(1, \chi)$ explizit und exakt für die folgenden Charaktere:

- (a) Für den nichttrivialen Charakter mod 4,
- (b) für den nichttrivialen reellen Charakter mod 5,
- (c) für $\chi(a) := (-1)^{(a-1)/2} \left(\frac{a}{3}\right)$.

Aufgabe 2 (7 Punkte): Klassenzahlformel

Zeigen Sie:

- (a) Sei $q = |\text{disc}(\mathbb{Q}(\sqrt{d}))|$. Für $d < -3$ quadratfrei gilt

$$h \leq \frac{1}{q} \sum_{\substack{(k,q)=1 \\ 0 < k < q/2}} (q - 2k) = \frac{\varphi(q)}{2} - \frac{2}{q} \sum_{\substack{(k,q)=1 \\ 0 < k < q/2}} k.$$

- (b) Für $d < -3$ quadratfrei gilt $h < -d/4$, falls $d \equiv 1 \pmod{4}$, und $h < -d/2$, falls $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$.
- (c) Für $d \not\equiv 1 \pmod{4}$ kann die reellquadratische Klassenzahlformel in der Form

$$h = \frac{1}{\log(u)} \left| \sum_{\substack{(k,q)=1 \\ 0 < k < q/4}} \chi(k) \log \tan \left(\frac{k\pi}{q} \right) \right|$$

geschrieben werden.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Einheitenuntergruppen im reellquadratischen Fall

Zeigen Sie:

- (a) Im reellquadratischen Fall kann die Klassenzahlformel in der Form $v = u^{-h}$ geschrieben werden, wo $v = \prod_{\substack{(k,q)=1 \\ 0 < k < q/2}} \sin(k\pi/2)^{\chi(k)}$.
- (b) v und -1 erzeugen in der Einheitengruppe von $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ eine Untergruppe vom Index h .
- (c) Berechnen Sie den Quotienten $\sin(2\pi/5)/\sin(\pi/5)$ explizit und exakt.
Gibt es eine geometrische Bedeutung?