Zahlentheorie II (Analytische Zahlentheorie), Blatt 8

hhu Düsseldorf
SoSe 2023

Abgabe: bis Montag 12.6.2023, vor der Vorlesung

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/zt2/`

Aufgabe 1 (8 Punkte): Der Satz von Polya–Vinogradov

(a) Sei I ein reelles Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$ mit $x \pm \delta \in I$ gilt:

$$f(x) \leq \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(y) \, \mathrm{d}y.$$

(b) Sei χ ein primitiver Charakter mod q und $M, N \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{m=M}^{M+N} \chi(m) \leq \sqrt{q} \log(q).$$

(c) Sei $p > 2$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass es einen quadratischen Nichtrest a mod p gibt mit $1 < a \leq \sqrt{p} \log(p) + 1$.

Hinweis zu (b): Lösen Sie Lemma 12.8 der Vorlesung nach $\chi(n)$ auf und bilden Sie die Summe. Absolutbetrag so nehmen, dass innen eine geometrische Summe steht, die mit Aufgabe A2 von Blatt 5 abgeschätzt werden kann. Die entstehenden Summanden können dann mit Teil (a) weiter behandelt werden.

Aufgabe 2 (2 Punkte):

(a) Geben Sie für $q \in \mathbb{N}$ und $(a, q) = 1$ eine obere Schranke für die kleinste Primzahl p mit $p \equiv a(q)$ an, ausgedrückt als Funktion von q.

Hinweis: Siegel–Walfisz

(b) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Zeigen Sie unter Annahme der (GRH), dass die Primzahl aus (a) dann $\ll q^{2+\varepsilon}$ ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Orthogonalitätsrelationen

Sei $k \mid \varphi(q)$ und $(h, q) = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass $\displaystyle\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)} \chi(a^k)\overline{\chi}(h) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a^k \equiv h \ (q), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

(b) Sei $N_k(h) := \#\{a \ (q);\ a^k \equiv h \ (q)\}$. Zeigen Sie $N_k(h) = \displaystyle\sum_{\chi, \chi^k = \chi_0} \chi(h)$.