Zahlentheorie II (Analytische Zahlentheorie), Blatt 5

hhu Düsseldorf
SoSe 2023

Abgabe: bis Montag 15.5.2023, vor der Vorlesung

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/zt2/`

Aufgabe 1 (5 Punkte): Zur Lindelöf-Vermutung

Eine quantitative Version der Lindelöf-Vermutung besagt

$$\zeta(s) \ll \exp\left(\frac{C\log t}{\log\log t}\right) \text{ für ein } C>0 \text{ und alle } \sigma \geq 1/2,\ t>e.$$

Welches nullstellenfreie Gebiet kann daraus mit den Mitteln der Vorlesung hergeleitet werden? Wie ist dieses im Vergleich zum Vinogradov–Korobov-nullstellenfreien Gebiet zu bewerten?

Welche obere Schranke für $\zeta(s)$ im kritischen Streifen müsste bewiesen werden, um daraus mit den Mitteln der Vorlesung die Riemannsche Vermutung herleiten zu können?

Aufgabe 2 (3 Punkte): Nichttriviale Exponentialsummenabschätzung

Seien $a, b \in \mathbb{N}_0$ mit $a < b$, $\beta \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $\Big|\sum_{n=a+1}^{b} \mathrm{e}(\alpha n+\beta)\Big| \leq \dfrac{1}{|\sin(\pi\alpha)|}$.

Aufgabe 3 (7 Punkte): Zum Vinogradov-Integral

(a) Zeigen Sie die Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^1 \mathrm{e}(\alpha n)\,\mathrm{d}\alpha = \begin{cases} 1, & \text{falls } n=0, \\ 0, & \text{falls } n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}. \end{cases}$$

(b) Seien $k, s \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass der Wert des Vinogradov-Integrals

$$J_{s,k}(N) := \int_{[0,1[^k} \Big|\sum_{x\leq N} \mathrm{e}(\alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \cdots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x)\Big|^{2s}\,\mathrm{d}\underline{\alpha}, \qquad \underline{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_k),$$

übereinstimmt mit der Anzahl der Lösungen $(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_s) \in \{1, \ldots, N\}^{2s}$ des Vinogradov-Systems

$$\begin{aligned} x_1 + \cdots + x_s &= y_1 + \cdots + y_s \\ x_1^2 + \cdots + x_s^2 &= y_1^2 + \cdots + y_s^2 \\ &\vdots \\ x_1^k + \cdots + x_s^k &= y_1^k + \cdots + y_s^k \end{aligned}$$

Hinweis: $|z|^{2s} = (z\overline{z})^s$ und Teil (a).